	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2024-2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea λ un número real y considérense las matrices $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.
b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ.
c) (1 punto) Para $\lambda=1$, discutir el sistema $\left(A^tA\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2\\ a^2\\ 2a\end{pmatrix}$ según los valores de *a*.

Pregunta 1.2. **(**2.5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sea la función $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+11 & si\ \ x<2\\ \sqrt{5x-1} & si\ \ x\geq 2\end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de la función en R.
b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo (1, 3).
c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Pregunta 2.2. Dada la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Estudia la paridad de la función $g(x)=f\left(xf(x)\right)$.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$

c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$, y la recta $r\equiv(x,y,z)=(\lambda,\lambda,\lambda+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta *r* y pasa por el punto B.

c) (0.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a *r* y pase por A.

Pregunta 3.2. Dados los tres planos $\pi_1:-2x-2y+z=0;\ \pi_2:-2x+y-2z=0$ y $\pi_3:x-2y-2z=0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

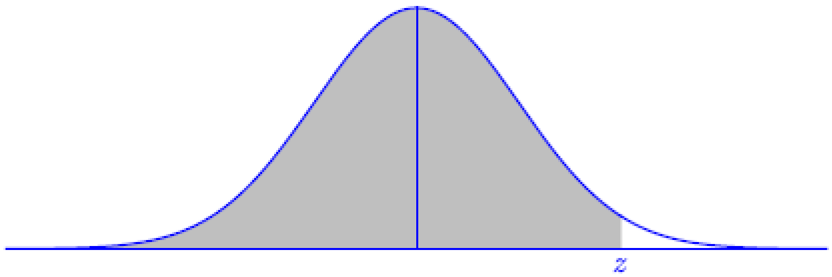
b) (1.5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3,4/3,10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3,8/3,5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73.2 %.

a) (1.5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0.5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1.1. Sea λ un número real y considérense las matrices $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.
b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ.
c) (1 punto) Para $\lambda=1$, discutir el sistema $\left(A^tA\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2\\ a^2\\ 2a\end{pmatrix}$ según los valores de *a*.

a) Calculamos la expresión de la matriz AB.

$$AB=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+\lambda & \lambda^2-1-\lambda^2\\ -1 & -\lambda+\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Para que una matriz no tenga inversa su determinante debe ser cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de AB.

$$|AB|=\begin{vmatrix}2\lambda & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

El determinante de AB vale –1 para cualquier valor de λ. No existe ningún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.

b) Calculamos la expresión de la matriz BA.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1+\lambda^2 & \lambda-\lambda\\ 0 & -\lambda & 1\\ \lambda & 1-\lambda^2 & \lambda+\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1+\lambda^2 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda\end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de BA.

$$|BA|=\begin{vmatrix}\lambda & 1+\lambda^2 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda\end{vmatrix}=-2\lambda^3+\lambda\left(1+\lambda^2\right)-\lambda\left(1-\lambda^2\right)=-2\lambda^3+\lambda+\lambda^3-\lambda+\lambda^3=0$$

Como el determinante siempre vale 0 el rango de A no es 3. Su rango es 2 o 1.
Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera columna y la tercera fila su determinante vale $\begin{vmatrix}1+\lambda^2 & 0\\ -\lambda & 1\end{vmatrix}=1+\lambda^2$. Este determinante nunca vale cero, por lo que el rango de BA es 2 para cualquier valor de λ.

c) Para $\lambda = 1$ determinamos la expresión de la matriz $A^t A$.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1-1 \\ 1 & 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Averiguamos su rango.

$$\left| A^t A \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 2 - 2 - 0 = 0$$

Al ser el determinante nulo el rango de $A^t A$ no es 3.
Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$.
El rango de A es 2.

La matriz ampliada del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$. Como la primera columna es la mitad de la suma de las columnas segunda y tercera consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna, calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4a^2 - 0 - 4a - 2a^2 = 2a^2 - 4a$$

$$2a^2 - 4a = 0 \Rightarrow 2a\left(a-2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 0} \\ a - 2 = 0 \to \boxed{a = 2} \end{cases}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$.
En este caso el determinante del menor de orden 3 de la matriz ampliada es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $a = 0$ o $a = 2$.
En este caso el determinante del menor de orden 3 de la matriz ampliada es nulo y su rango no es 3. Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a = 0$ o $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado y si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el sistema es incompatible.

Pregunta 1.2. (2.5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

Llamamos “x”, “y”, “z” a los litros de capacidad de la garrafa pequeña, mediana y grande, respectivamente.

“Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande” → $6x+2=y+z$.
“Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L” → $2z=2y+x+1$.
“El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes” → $14x+6y=5y+5z$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 6x+2=y+z \\ 2z=2y+x+1 \\ 14x+6y=5y+5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+2=y+z \\ 2z-2y-1=x \\ 14x+y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6(2z-2y-1)+2=y+z \\ 14(2z-2y-1)+y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12z-12y-6+2=y+z \\ 28z-28y-14+y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 11z-13y=4 \\ 23z-27y=14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\times 23} \quad 253z-299y=92 \\ \times(-11) \rightarrow -253z+297y=-154 \end{array}\right\}$$

$$-2y=-62 \Rightarrow \boxed{y=\frac{62}{2}=31} \Rightarrow 11z-13\cdot 31=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11z=407 \Rightarrow \boxed{z=\frac{407}{11}=37} \Rightarrow \boxed{x=2\cdot 37-2\cdot 31-1=11}$$

La garrafa pequeña tiene una capacidad de 11 litros, la mediana de 31 litros y la grande de 37 litros.
Como el aljibe se llena con cinco garrafas medianas y cinco grandes el aljibe tiene una capacidad de $5\cdot 31+5\cdot 37=340$ litros.

Pregunta 2.1. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+11 & si\ \ x<2 \\ \sqrt{5x-1} & si\ \ x\geq 2 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de la función en R.
b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo (1, 3).
c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre *x = 1* y *x = 3*.

a) En el intervalo $(-\infty,2)$ la función es $f(x)=x^2-6x+11$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(2,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{5x-1}$, Como el radicando es positivo para $x>2$ la función es continua.

Estudiamos la continuidad en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\sqrt{10-1}=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{5x-1}=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-6x+11=2^2-12+11=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=3$$

La función es continua en *x = 2* y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

b) Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+11 & si\ \ x<2 \\ \sqrt{5x-1} & si\ \ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-6 & si\ \ x<2 \\ \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}} & si\ \ x>2 \end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0\to 2x=6\to x=3\notin(1,3) \\ \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}}=0\to 5=0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

No existe ningún punto crítico en el intervalo (1, 3) que anule la derivada y que pueda ser un extremo relativo. Solo falta estudiar el valor *x = 2* donde la función cambia de definición. Como sabemos que la función es continua estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de 2 tomamos *x = 1.5* y la derivada vale $f'(1.5)=2\cdot 1.5-6=-3<0$. La función decrece de 1 a 2.
- Después de 2 tomamos *x = 2.5* y la derivada vale $f'(2.5)=\dfrac{5}{2\sqrt{5\cdot 2.5-1}}>0$. La función crece de 2 a 3.

Como la función decrece en (1, 2) y crece en (2, 3) la función tiene un mínimo relativo en $x=2$. La función solo tiene este extremo relativo en el intervalo (1, 3).

c) Comprobamos si la función corta el eje OX en el intervalo [1, 3].

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+11=0 \to x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(11)}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-8}}{2}=\text{No existe} \\ \sqrt{5x-1}=0 \to 5x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{5}\notin[2,+\infty) \end{cases}$$

La función no corta el eje OX y además es positiva, por lo que el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$ la podemos calcular como la integral definida de la función entre 1 y 3. La función cambia de definición en $x = 2$ y calculamos esta integral como la suma de dos integrales definidas: una entre 1 y2, la otra entre 2 y 3.

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2 x^2-6x+11dx+\int_2^3 \sqrt{5x-1}dx=\ldots$$

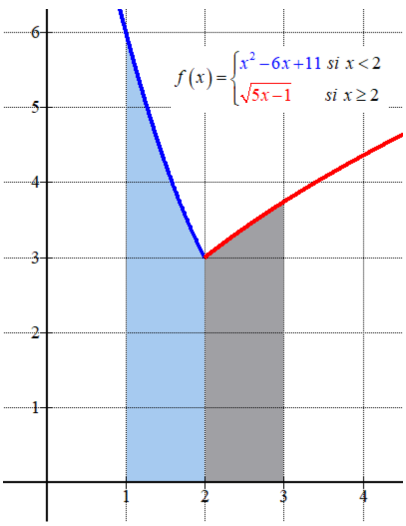
$$\boxed{\int \sqrt{5x-1}dx=\int (5x-1)^{1/2}dx=\frac{1}{5}\frac{(5x-1)^{1+1/2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{(5x-1)^{3/2}}{15/2}=\frac{2\sqrt{(5x-1)^3}}{15}}$$

$$\ldots=\left[\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+11x\right]_1^2+\left[\frac{2\sqrt{(5x-1)^3}}{15}\right]_2^3=$$

$$=\left(\left[\frac{2^3}{3}-6\frac{2^2}{2}+11\cdot 2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-6\frac{1^2}{2}+11\right]\right)+\left(\left[\frac{2\sqrt{(5\cdot 3-1)^3}}{15}\right]-\left[\frac{2\sqrt{(5\cdot 2-1)^3}}{15}\right]\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-12+22-\frac{1}{3}+3-11+\frac{2\sqrt{14^3}}{15}-\frac{2(27)}{15}=\boxed{\frac{11+28\sqrt{14}}{15}\simeq 7.7u^2}$$

El área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$ tiene un valor de $\frac{11+28\sqrt{14}}{15}\simeq 7.7$ unidades cuadradas.



Pregunta 2.2. Dada la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Estudia la paridad de la función $g(x)=f(xf(x))$.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$

c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 xf(x)dx$.

a) Comprobamos la paridad de $f(x)$.

$$f(-x)=sen\left(\frac{\pi}{2}(-x)\right)=sen\left(\frac{-\pi x}{2}\right)=-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-f(x)$$

La función $f(x)$ es impar.

Comprobamos la paridad de $g(x)$.

$$g(-x)=f\left((-x)f(-x)\right)=f\left((-x)\left(-f(x)\right)\right)=f\left(xf(x)\right)=g(x)$$

La función $g(x)$ es par.

b) Calculamos el límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-2}{x}=\frac{\sqrt{4+3sen\left(\frac{\pi}{2}0\right)}-2}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\cdot\sqrt{4+3sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\cdot\sqrt{4+3sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}=\frac{\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}0\right)}{2\cdot\sqrt{4+3sen\left(\frac{\pi}{2}0\right)}}=\frac{\frac{3\pi}{2}}{4}=\boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

Hemos obtenido que $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}=\frac{3\pi}{8}$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xf(x)\,dx = \int x\,sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \Rightarrow v = \int sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{array} \right\} =$$

$$= x\cdot\frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \int \frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{-2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{-2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \boxed{\frac{-2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) + K}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida.

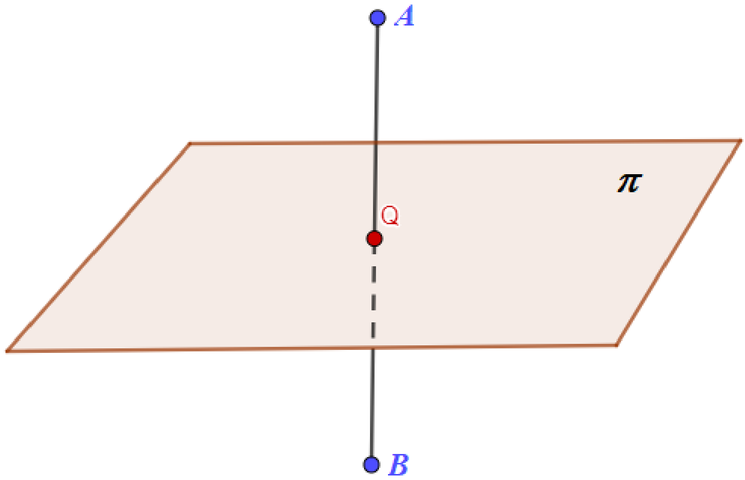
$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \left[\frac{-2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\frac{0}{\pi}\cos(0) + \frac{4}{\pi^2}sen(0)\right] = \boxed{\frac{4}{\pi^2}}$$

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$, y la recta $r \equiv (x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda+1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.
b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B.
c) (0.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A.

a) Nos piden hallar el plano π del dibujo.



Primero hallamos el punto Q como el punto medio del segmento AB. Este punto pertenece al plano que buscamos.

$$Q = \frac{(0,0,0)+(1,1,1)}{2} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

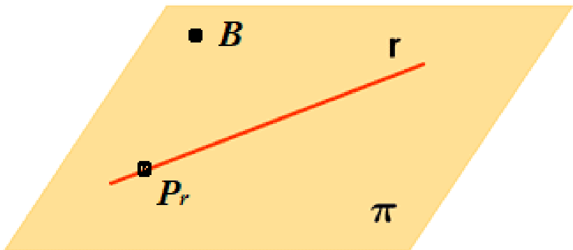
El plano tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$ y contiene el punto Q. Hallamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1)-(0,0,0) = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in \pi \\ \pi : x+y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+D=0 \Rightarrow D = -\frac{3}{2} \Rightarrow \pi : x+y+z-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x+2y+2z-3=0}$$

La ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos es $\pi : 2x+2y+2z-3=0$.

b) Nos piden hallar el plano del dibujo.



Hallamos un punto y un vector director de la recta r.

$$r \equiv (x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda+1),\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,0,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \end{cases}$$

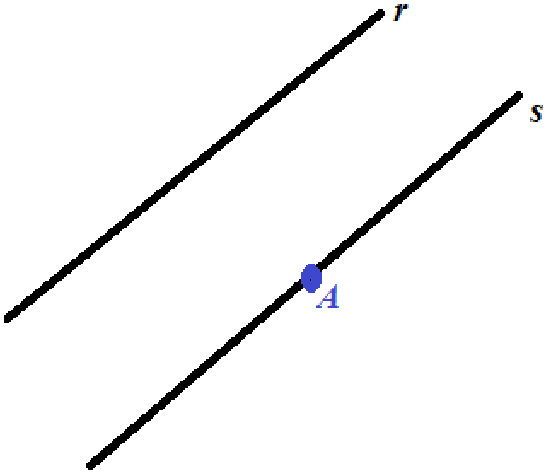
El plano que nos piden hallar pasa por P_r y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector que une el punto B con cualquier punto de la recta.
Hallamos la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BP_r} = (0,0,1)-(1,1,1) = (-1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y-(z-1)+z-1+x=0 \Rightarrow \boxed{\pi : x-y=0}$$

El plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B es $\pi : x-y=0$.

c) Nos piden hallar la recta s del dibujo.



La recta que buscamos al ser paralela a r tienen el mismo vector director: $\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$ y pasa por el punto $A(0,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,0) \in s \\ \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

La recta paralela a r que pasa por A tiene ecuación $s : \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

Pregunta 3.2. Dados los tres planos $\pi_1: -2x-2y+z=0$; $\pi_2: -2x+y-2z=0$ y $\pi_3: x-2y-2z=0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

b) (1.5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

a) Utilizamos el producto escalar para determinar el ángulo entre los vectores normales de los planos.

$$\pi_1: -2x-2y+z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(-2,-2,1)$$
$$\pi_2: -2x+y-2z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(-2,1,-2)$$
$$\pi_3: x-2y-2z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_3}=(1,-2,-2)$$

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(-2,-2,1)(-2,1,-2)=4-2-2=0 \Rightarrow \acute{A}ngulo\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\acute{A}ngulo(\pi_1,\pi_2)=90^{\circ}$$

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_3}=(-2,-2,1)(1,-2,-2)=-2+4-2=0 \Rightarrow \acute{A}ngulo\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\right)=\acute{A}ngulo(\pi_1,\pi_3)=90^{\circ}$$

$$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_3}=(-2,1,-2)(1,-2,-2)=-2-2+4=0 \Rightarrow \acute{A}ngulo\left(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}\right)=\acute{A}ngulo(\pi_2,\pi_3)=90^{\circ}$$

Los planos dos a dos forman un ángulo de 90º.
Hallamos el punto de intersección de los planos resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

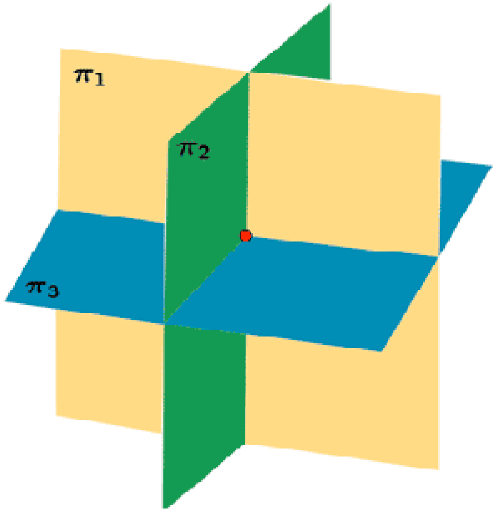
$$\left.\begin{array}{l}\pi_1: -2x-2y+z=0\\ \pi_2: -2x+y-2z=0\\ \pi_3: x-2y-2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2x-2y+z=0\\ -2x+y-2z=0\\ x=2y+2z\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2(2y+2z)-2y+z=0\\ -2(2y+2z)+y-2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-4y-4z-2y+z=0\\ -4y-4z+y-2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6y-3z=0\\ -3y-6z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2y+z=0\\ y+2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}z=-2y\\ y+2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+2(-2y)=0 \Rightarrow y-4y=0 \Rightarrow -3y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-2\cdot 0=0} \Rightarrow \boxed{x=2\cdot 0+2\cdot 0=0}$$

El punto intersección de los tres planos es O(0, 0, 0).



b) Hallamos el punto P como el punto de corte de la recta r_1 perpendicular al plano π_1 que pasa por Q_1 y la recta r_2 perpendicular al plano π_2 que pasa por Q_2.

Primero hallo las ecuaciones de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} Q_1(1/3,4/3,10/3)\in r_1 \\ \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{n_1}=(-2,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r_1:\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-2\lambda \\ y=\dfrac{4}{3}-2\lambda \\ z=\dfrac{10}{3}+\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_2(-1/3,8/3,5/3)\in r_2 \\ \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{n_2}=(-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow r_2:\begin{cases} x=\dfrac{-1}{3}-2\alpha \\ y=\dfrac{8}{3}+\alpha \\ z=\dfrac{5}{3}-2\alpha \end{cases}$$

Hallo el punto P de corte de ambas rectas.

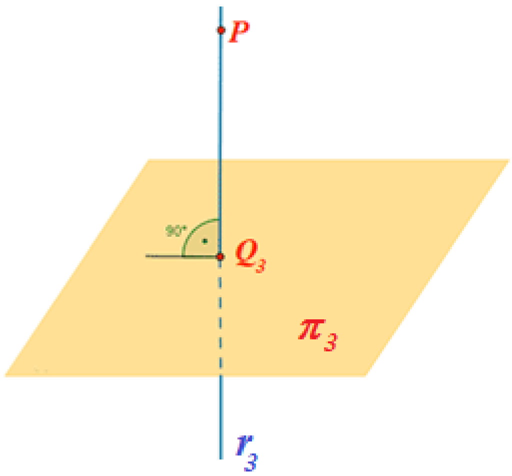
$$\left.\begin{array}{l} r_1:\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-2\lambda \\ y=\dfrac{4}{3}-2\lambda \\ z=\dfrac{10}{3}+\lambda \end{cases} \\ r_2:\begin{cases} x=\dfrac{-1}{3}-2\alpha \\ y=\dfrac{8}{3}+\alpha \\ z=\dfrac{5}{3}-2\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{3}-2\lambda=\dfrac{-1}{3}-2\alpha \\ \dfrac{4}{3}-2\lambda=\dfrac{8}{3}+\alpha \\ \dfrac{10}{3}+\lambda=\dfrac{5}{3}-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1-6\lambda=-1-6\alpha \\ 4-6\lambda=8+3\alpha \\ 10+3\lambda=5-6\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}2-6\lambda=-6\alpha\\ \Rightarrow -6\lambda=4+3\alpha\\ 5+3\lambda=-6\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-1+3\lambda=3\alpha\to\dfrac{3\lambda-1}{3}=\alpha\\ -6\lambda=4+3\alpha\\ 5+3\lambda=-6\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6\lambda=4+3\dfrac{3\lambda-1}{3}\\ 5+3\lambda=-6\dfrac{3\lambda-1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6\lambda=4+3\lambda-1\\ 5+3\lambda=-6\lambda+2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-9\lambda=3\\ 9\lambda=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}}\Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{3}-2\dfrac{-1}{3}=1\\ y=\dfrac{4}{3}-2\dfrac{-1}{3}=2\\ z=\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3}=3\end{cases}\Rightarrow \boxed{P(1,2,3)}$$

El punto P tiene coordenadas $P(1,2,3)$.

Hallamos el punto Q_3 proyección ortogonal del punto P sobre el plano π_3.



$$\left.\begin{array}{l}P(1,2,3)\in r_3\\ \vec{v_3}=\vec{n_3}=(1,-2,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow r_3:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=2-2\beta\\ z=3-2\beta\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_3: x-2y-2z=0\\ r_3:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=2-2\beta\\ z=3-2\beta\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\beta-2(2-2\beta)-2(3-2\beta)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\beta-4+4\beta-6+4\beta=0\Rightarrow 9\beta=9\Rightarrow \beta=1\Rightarrow \begin{cases}x=1+1=2\\ y=2-2=0\\ z=3-2=1\end{cases}\Rightarrow \boxed{Q_3(2,0,1)}$$

La proyección ortogonal del punto P sobre el plano π_3 tiene coordenadas $Q_3(2,0,1)$.

Pregunta 4. Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73.2 %.

a) (1.5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0.5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de personas no vacunadas de un grupo de 5. La probabilidad de que una persona esté vacunada es 0.732 y la de no estar vacunada es 1 – 0.732 = 0.268.
Nuestra variable aleatoria X es una binomial: X = B(5, 0.268).
Hallamos la probabilidad $P(X>1)$.

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=$$

$$=1-\binom{5}{0}0.268^0\cdot 0.732^5-\binom{5}{1}0.268^1\cdot 0.732^4=1-0.732^5-5\cdot 0.268\cdot 0.732^4\simeq \boxed{0.405}$$

Como esta probabilidad es menor que 0.5 no se deben restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años.

Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de personas no vacunadas de un grupo de 7. Y = B(7, 0.268).
Hallamos la probabilidad $P(X>1)$.

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=$$

$$=1-\binom{7}{0}0.268^0\cdot 0.732^7-\binom{7}{1}0.268^1\cdot 0.732^6=1-0.732^7-7\cdot 0.268\cdot 0.732^6\simeq \boxed{0.599}$$

Como esta probabilidad es mayor que 0.5 se deben restringir las reuniones de 7 personas mayores de 65 años.

b) Consideramos X a la variable aleatoria que cuenta el número de personas vacunadas de un grupo de 500 mayores de 65 años. X = B(500, 0.732).
Como el número de repeticiones es muy grande para el cálculo de probabilidades podemos aproximar esta variable a una normal de media $\mu=np=500\cdot 0.732=366$ y desviación típica $\sqrt{npq}=\sqrt{500\cdot 0.268\cdot 0.732}\simeq 9.9$. Y = N(366, 9.9).
Esta aproximación es buena pues $np=366>5$ y $nq=500\cdot 0.268=134>5$.
Nos piden calcular $P(X\ge 350)$.

$$P\left(X\geq 350\right)=\begin{Bmatrix}Corrección\\ de\,Yates\end{Bmatrix}=P\left(Y\geq 349.5\right)=\left\{Tipificamos\right\}=$$

$$=P\left(Z\geq \frac{349.5-366}{9.9}\right)=P\left(Z\geq -1.67\right)=P\left(Z\leq 1.67\right)=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{Bmatrix}=\boxed{0.9525}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]	0

La probabilidad de que en un grupo de 500 personas mayores de 65 años al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe es de 0.9525.