Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

USaP
2024/25
AZTERKETA EREDUA
MATEMATIKA II

PAU
2024/25
MODELO DE EXAMEN
MATEMÁTICAS II

EUSKO JAURLARITZA / GOBIERNO VASCO
HEZKUNTZA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:
- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

USaP

2024/25

AZTERKETA EREDUA

MATEMATIKA II

PAU

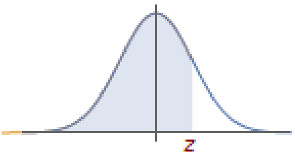
2024/25

MODELO DE EXAMEN

MATEMÁTICAS II

EUSKO JAURLARITZA — GOBIERNO VASCO

HEZKUNTZA SAILA — DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.
Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.
¿La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva entre 1750 y 1850 en adultos puede ser 0, 0037? Razona tu respuesta.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos apartados.
(2A) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x+4y+z=3 \\ \alpha x-5y+2z=-2 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha=0$ y $\alpha=1$.

(2B) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos apartados.

(3A) Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x=2\lambda, \\ y=-1+4\lambda, \\ z=2-\lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-y=1, \\ z=3. \end{cases},$$

Calcula la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
Dado el punto $P(-8,-8,0)$, calcula el punto Q de la recta *r* de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta *r*.

(3B) Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+4z=1 \end{cases} \qquad \pi : 2x-3y+Az=10$$

Calcula el valor del del parámetro A para que la recta *r* y el plano π sean paralelos.
Si A = 21, calcula la intersección del plano π y la recta *r*.
Si A = 1, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos apartados.

(4A) Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$ son paralelas. Además, *f* tiene un extremo relativo cuando $x = 1$ y $f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.

Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.
Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -1$ para los valores de los parámetros A = −3, B = 0 y C = 4.

(4B) Sea $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.
Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.
Calcula las asíntotas de *f*.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos apartados.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1}\,dx \qquad\qquad \int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}\,dx$$

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.
Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas y calcula el área de ese recinto.

Soluciones

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.
Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.
¿La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva entre 1750 y 1850 en adultos puede ser 0, 0037? Razona tu respuesta.

Primero. Consideramos la variable aleatoria X = Número de adultos que quedan protegidos contra la tuberculosis pulmonar.
Hay n = 3289 repeticiones del experimento y son independientes entre si, siendo la probabilidad de éxito (quedar protegido) p = 0.54.
La distribución es una binomial de parámetros n = 3289 y p = 0.54. X = B(3289, 0.54)

Segundo. Nos piden calcular $P(X=1800)$.

$$P(X=1800)=\binom{3289}{1800}0.54^{1800}\cdot 0.46^{1489}=$$ ¡La calculadora no es capaz de hacer este cálculo!

Usando internet y la web “wolfram Alpha” obtenemos que la probabilidad vale 0,009837.

Calculamos esta probabilidad aproximando la binomial X a una normal Y de media $\mu = np = 3289\cdot 0.54 = 1776.06$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3289\cdot 0.54\cdot 0.46} \simeq 28.58$.
Y = N(1776.06, 28.58)
Esta aproximación es buena pues $np = 1776.06 > 5$ y $nq = 3289\cdot 0.46 = 1512.94 > 5$.

$$P(X=1800)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(1799.5\le Y\le 1800.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(\frac{1799.5-1776.06}{28.58}\le Z\le \frac{1800.5-1776.06}{28.58}\right)=P(0.82\le Z\le 0.855)=$$

$$=P(Z\le 0.855)-P(Z\le 0.82)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\frac{0.8023+0.8051}{2}-0.7939=\boxed{0.0098}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'0
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'52
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'56
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'60
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'64
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'68
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'71
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'74
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'77
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'80
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'83

Tercero. Nos piden calcular $P(X<1700)$.

Usamos la aproximación a la normal Y para obtener esta probabilidad.

$$P(X<1700)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\leq 1699.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(Z\leq \frac{1699.5-1776.06}{28.58}\right)=P(Z\leq -2.68)=P(Z\geq 2.68)=$$

$$=1-P(Z\leq 2.68)=\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}=1-0.9963=\boxed{0.0037}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	(
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'

Cuarto. Nos preguntan si es posible que $P(1750\leq X\leq 1850)=0.0037$.

$$P(1750\leq X\leq 1850)=P(X=1750)+P(X=1751)+P(X=1752)+.....$$

$$....+P(X=1800)+......+P(X=1850)\geq P(X=1800)=0.0098$$

Hemos visto que $P(1750\leq X\leq 1850)\geq 0.0098$, por lo que esta probabilidad no puede valer 0.0037 (menor que 0.0098).

(2A) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3 \\ \alpha x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1 & 3 \\ \alpha & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -15\alpha + 16 - \alpha + 10 - 12\alpha + 2\alpha = -26\alpha + 26$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -26\alpha + 26 = 0 \Rightarrow 26\alpha = 26 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{26}{26} = 1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Usando el método de Gauss transformamos la matriz ampliada A/B en otra triangular equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & -5 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \\ \hline 0 & -9 & 1 & -5 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -9 & 1 & -5 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llll} Fila\,3^{a} - Fila\,2^{a} & & & \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & 9 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\begin{matrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B}\right)$$

Las matrices A y A/B tienen rango 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 4y + z = 3 \\ -5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z = 3 - 4y \\ -5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5y + 2(3 - 4y) = -2 \\ 2x - y + 3(3 - 4y) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -5y + 6 - 8y = -2 \\ 2x - y + 9 - 12y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -13y = -8 \rightarrow \boxed{y = \frac{8}{13}} \\ 2x - 13y = -8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 13\frac{8}{13} = -8 \Rightarrow 2x = -8 + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{z = 3 - 4\frac{8}{13} = \frac{7}{13}}$$

Para $\alpha = 0$ la solución es $x = 0;\ y = \frac{8}{13};\ z = \frac{7}{13}$.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\begin{matrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 4y + z = 3 \\ -9y + z = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 4y + z = 3 \\ z = -5 + 9y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 4y - 5 + 9y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 8 - 13y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 8 - 13\alpha \\ y = \alpha & ;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -5 + 9\alpha \end{cases}}$$

Para $\alpha = 1$ las soluciones del sistema son $x = 8 - 13\alpha;\ y = \alpha;\ z = -5 + 9\alpha$, siendo α cualquier valor real.

(2B) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene dimensiones 3×4 y puede tener rango 3, 2 o 1.
Utilizamos el método de Gauss para triangular la matriz y estudiar con más facilidad su rango.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} m & -2 & m-2 & 1 \\ -m & -2+m & -2 & -1 \\ \hline 0 & m-4 & m-4 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ 0 & m-4 & m-4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Columna } 2^{a} - \text{Columna } 3^{a} \\ \begin{array}{cc|c} 3 & -4 & -1 \\ 2-m & -2 & -m \\ m-4 & -m+4 & 0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ m & -m & 2 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Columna } 2^{a} + \text{Columna } 1^{a} \\ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -m & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -m & 2 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante del menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna (todo ceros).

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -m & 2 & 1 \\ 0 & m-4 & 0 \end{vmatrix} = -m(m-4)+(m-4)=(-m+1)(m-4)$$

$$(-m+1)(m-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} -m+1=0 \to \boxed{m=1} \\ m-4=0 \to \boxed{m=4} \end{cases}$$

Estudiamos las tres situaciones diferentes que nos planteamos.

Situación 1ª. $m\neq 1$ y $m\neq 4$.
En este caso el menor de orden 3 considerado tiene determinante no nulo y el rango de la matriz A es 3.

Situación 2ª. $m=1$
En este caso el menor de orden 3 considerado tiene determinante nulo y el rango de A no es 3.

La matriz equivalente a A obtenida queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª y 2ª columnas y la primera fila → $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Situación 3ª. $m = 4$

En este caso el menor de orden 3 considerado tiene determinante nulo y el rango de A no es 3.

La matriz equivalente a A obtenida queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª y 2ª columnas y la tercera fila → $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq 4$ el rango de A es 3 y si $m = 1$ o $m = 4$ el rango de A es 2.

(3A) Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases},$$

Calcula la posición relativa de las rectas r y s.
Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
Dado el punto $P(-8,-8, 0)$, calcula el punto Q de la recta r de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta r.

Primero. Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,4,-1) \\ P_r(0,-1,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} y = -1 + 2x, \\ z = 3. \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + 2\alpha, \\ z = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1,2,0) \\ Q_s(0,-1,3) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,4,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{-1}{0}$$

No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.
Las rectas se cortan o cruzan.
Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-1,3) - (0,-1,2) = (0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,4,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,2,0) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

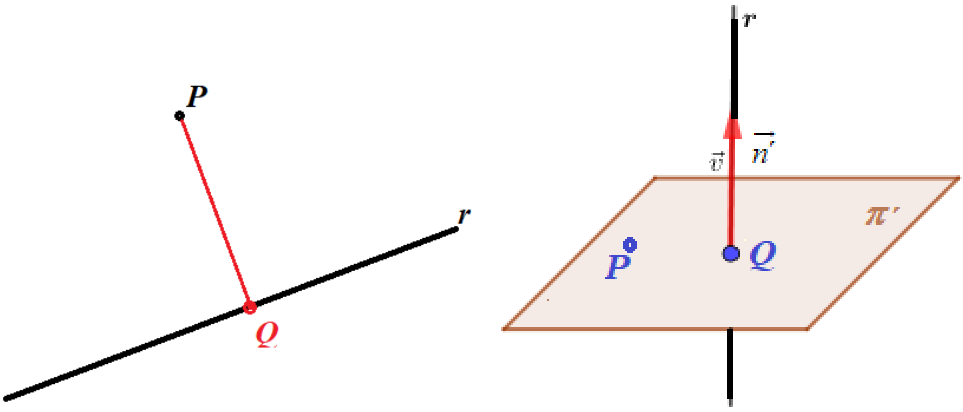
Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan. Están en un mismo plano y coinciden en un único punto.

Segundo. El plano que contiene ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y pasa por el punto $P_r(0,-1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,2,0)\\ P_r(0,-1,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y-1+4z-8-4z+8+2x=0\Rightarrow \boxed{\pi: 2x-y-1=0}$$

Tercero. Nos piden hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Luego hallamos el punto de corte del plano y la recta que será el punto Q.
El plano π´ perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}P(-8,-8,0)\in\pi'\\ \vec{n'}=\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(-8,-8,0)\in\pi'\\ \pi': 2x+4y-z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow -16-32+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=48\Rightarrow \pi': 2x+4y-z+48=0$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta *r* y el plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases}x=2\lambda,\\ y=-1+4\lambda,\\ z=2-\lambda;\end{cases}\\ \pi': 2x+4y-z+48=0\end{array}\right\}\Rightarrow 4\lambda+4(-1+4\lambda)-2+\lambda+48=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda-4+16\lambda-2+\lambda+48=0\Rightarrow 21\lambda=-42\Rightarrow \lambda=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2(-2)=-4\\ y=-1+4(-2)=-9\Rightarrow \boxed{Q(-4,-9,4)}\\ z=2+2=4\end{cases}$$

El punto Q proyección ortogonal de P sobre la recta *r* tiene coordenadas $Q(-4,-9,4)$.

(3B) Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \qquad \pi : 2x - 3y + Az = 10$$

Calcula el valor del del parámetro A para que la recta *r* y el plano π sean paralelos.
Si A = 21, calcula la intersección del plano π y la recta *r*.
Si A = 1, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

Primero. Para que recta y plano sean paralelos el vector normal del plano y el director de la recta deben ser ortogonales (producto escalar nulo) y además, ningún punto de la recta debe pertenecer al plano.

Hallamos el vector normal del plano.

$$\pi : 2x - 3y + Az = 10 \Rightarrow \vec{n} = (2, -3, A)$$

Hallamos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = 1 + y - 4z \end{cases} \Rightarrow 2 + 2y - 8z - y + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 7z + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 + 7z \Rightarrow x = 1 - 2 + 7z - 4z = -1 + 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = -2 + 7\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1, -2, 0) \\ \vec{v_r} = (3, 7, 1) \end{cases}$$

Aplicamos la condición $\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (3, 7, 1)(2, -3, A) = 0 \Rightarrow 6 - 21 + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = 15}$$

Comprobamos que para A = 15 la recta no está contenida en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2x - 3y + 15z = 10 \\ ¿P_r(-1, -2, 0) \in \pi ? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿2(-1) - 3(-2) + 15 \cdot 0 = 10 ? \Rightarrow ¿-2 + 6 = 10 ?$$

La igualdad no es cierta. La recta no está contenida en el plano.
Para que la recta *r* y el plano π sean paralelos debe ser A = 15.

Segundo. Si A = 21 el plano queda $\pi : 2x - 3y + 21z = 10$.

Hallamos el punto de intersección de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

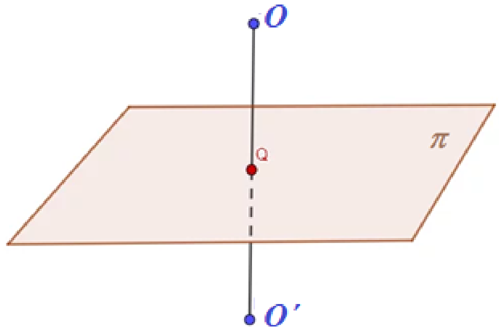
$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2x - 3y + 21z = 10 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = -2 + 7\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-1 + 3\alpha) - 3(-2 + 7\alpha) + 21\alpha = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+6\alpha+6-21\alpha+21\alpha=10 \Rightarrow 6\alpha=6 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1+3=2 \\ y=-2+7=5 \\ z=1 \end{cases}$$

La intersección del plano π y la recta *r* es el punto A(2, 5, 1).

Tercero. Si A = 1 el plano queda $\pi: 2x-3y+z=10$.

Nos piden hallar el punto O' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por O, después hallamos el punto Q de corte de recta y plano. El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{OO'}$.

La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x-3y+z=10 \Rightarrow \vec{n}=(2,-3,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v_r}=\vec{n}=(2,-3,1) \\ O(0,0,0)\in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{r} \pi: 2x-3y+z=10 \\ r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4\lambda+9\lambda+\lambda=10 \Rightarrow 14\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\frac{10}{14}=\frac{5}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2\frac{5}{7}=\frac{10}{7} \\ y=-3\frac{5}{7}=\frac{-15}{7} \Rightarrow Q\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right) \\ z=\frac{5}{7} \end{cases}$$

Para obtener el punto O' simétrico de *O* respecto del plano π le sumamos al punto Q el vector $\overrightarrow{OQ}$.

$$\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)$$

$$O' = Q+\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{20}{7},\frac{-30}{7},\frac{10}{7}\right)$$

El punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π es $\left(\frac{20}{7},\frac{-30}{7},\frac{10}{7}\right)$.

(4A) Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas. Además, *f* tiene un extremo relativo cuando $x=1$ y $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$.

Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.
Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ para los valores de los parámetros A = −3, B = 0 y C = 4.

Primero. Si las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas significa que tienen la misma pendiente y por tanto $f'(-1)=f'(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(-1)=f'(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 2^2+4A+B=3(-1)^2-2A+B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12+4A=3-2A \Rightarrow 6A=-9 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-9}{6}=\frac{-3}{2}}$$

La función queda $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+Bx+C$.

Si la función tiene un extremo relativo cuando x = 1 entonces la derivada se anula para este valor → $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-3x+B \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 1^2-3+B=0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

La función queda $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$.

Aplicamos la condición $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$. Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2e^0=2$$

Por lo que $f(0)=2$. Aplicamos esta condición y obtenemos el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C \\ f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2+C=2 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

Los valores buscados son $A=\frac{-3}{2}$, B = 0 y C = 2.

Segundo. Para los valores de los parámetros A = −3, B = 0 y C = 4 la función queda

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -1$ es $y - f(-1) = f´(-1)(x+1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 0 \\ f´(x) = 3x^2 - 6x \to f´(-1) = 3 + 6 = 9 \\ y - f(-1) = f´(-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 0 = 9(x+1) \Rightarrow \boxed{y = 9x + 9}$$

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -1$ es $y = 9x + 9$.

(4B) Sea $f(x)=2xe^{-2x^2}$.

Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.
Calcula las asíntotas de *f*.

Primero. Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=2xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x)=2e^{-2x^2}+2x\left(-4xe^{-2x^2}\right)=2e^{-2x^2}-8x^2e^{-2x^2}=\left(2-8x^2\right)e^{-2x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \left(2-8x^2\right)e^{-2x^2}=0 \Rightarrow 2-8x^2=0 \Rightarrow 8x^2=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

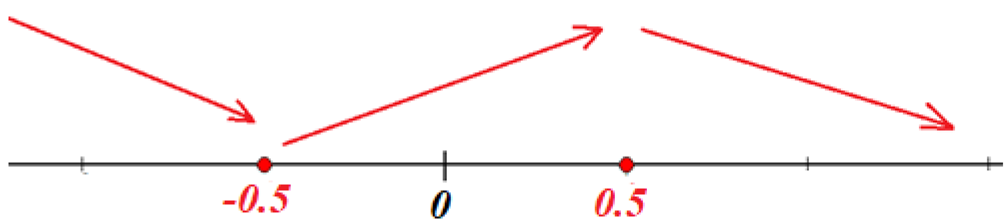
- En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale

  $f'(-1)=\left(2-8(-1)^2\right)e^{-2(-1)^2}=\frac{-6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale

  $f'(0)=\left(2-8\cdot 0^2\right)e^{-2\cdot 0^2}=2>0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale

  $f'(1)=\left(2-8\cdot 1^2\right)e^{-2\cdot 1^2}=\frac{-6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Segundo. La función tiene un mínimo relativo en $x=-0.5$ y un máximo relativo en $x=0.5$. Como $f(-0.5)=2(-0.5)e^{-2\cdot(-0.5)^2}=-e^{-0.5}$ y $f(0.5)=2(0.5)e^{-2\cdot 0.5^2}=e^{-0.5}$ el mínimo relativo es $\left(-0.5,\,-e^{-0.5}\right)$ y el máximo relativo es $\left(0.5,\,e^{-0.5}\right)$.

Tercero. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. $x = a$.

Al ser su dominio de definición todos los números reales no existe asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

Cuando x tiene a $+\infty$.

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación(L`Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Cuando x tiene a $-\infty$.

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación(L`Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx \qquad \int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx$$

Primero. Resolvemos la primera integral.

$$\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx = \ldots$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad -3x+2 & x^2+2x+1 \\ \hline -x^3-2x^2-x & x-2 \\ \quad -2x^2-4x+2 & \\ \quad\; 2x^2+4x+2 & \\ \hline \qquad\qquad 4 & \end{array} \Rightarrow \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{4}{x^2+2x+1}$$

$$\ldots = \int x-2+\frac{4}{x^2+2x+1}dx = \frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4}{x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4}{(x+1)^2}dx = \frac{x^2}{2}-2x+4\int (x+1)^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+4\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{x+1}+K}$$

Segundo. Resolvemos la segunda integral

$$\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$2-3x = A(x+1)+B \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \to 2+3=B \to B=5 \\ x=0 \to 2=A+B \to 2=A+5 \to A=-3 \end{cases}$$

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{-3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\dots = \int \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{-3}{x+1}\,dx + \int \frac{5}{(x+1)^2}\,dx = -3\int \frac{1}{x+1}\,dx + 5\int (x+1)^{-2}\,dx =$$

$$= -3\ln|x+1| + 5\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{-3\ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + K}$$

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.
Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas y calcula el área de ese recinto.

Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = x^2 \Rightarrow x^2 = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = 3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = 1} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas y el recinto limitado por ellas.

$y = x^2$

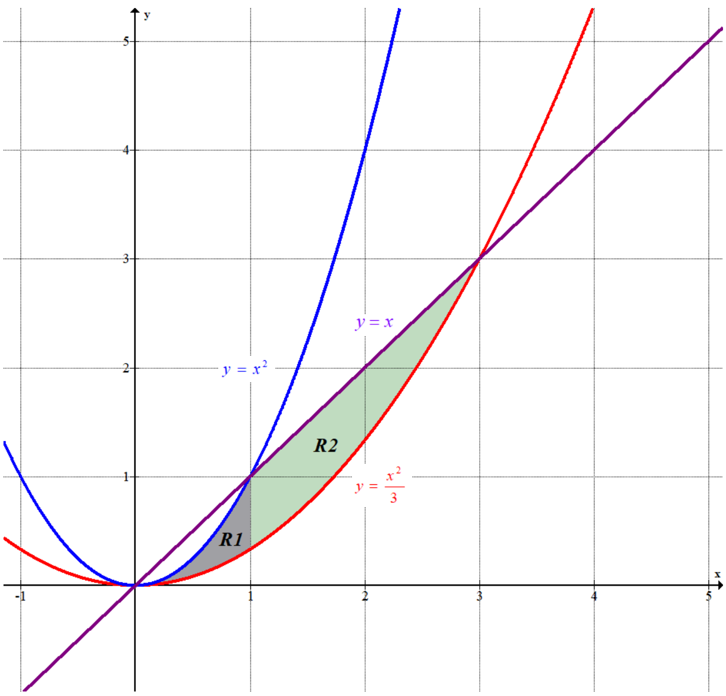
x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$y = \dfrac{x^2}{3}$

x	$y = x^2/3$
-1	$1/3$
0	0
1	$1/3$
2	$4/3$
3	3

$y = x$

x	$y = x$
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3



El recinto limitado por las curvas lo dividimos en dos partes para hallar su área.
Hallamos el valor del área de R1.

$$Área1=\int_0^1 x^2-\frac{x^2}{3}dx=\int_0^1 \frac{2x^2}{3}dx=\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right]=\boxed{\frac{2}{9}\,u^2}$$

Hallamos el valor del área de R2.

$$Área\,2=\int_1^3 x-\frac{x^2}{3}dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{9}\right]_1^3=$$

$$=\left[\frac{3^2}{2}-\frac{3^3}{9}\right]-\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{9}\right]=\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\boxed{\frac{10}{9}\simeq 1.111\,u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{2}{9}+\frac{10}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\simeq 1.33u^2$