

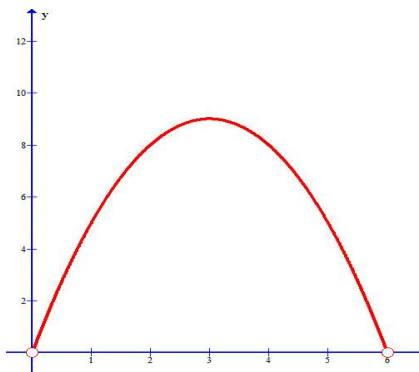


Solución examen X

1.- A partir de la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$, escribe las expresiones algebraicas de las funciones representadas a continuación:

Sol: a) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$ b) $f(x) = \frac{-1}{x+2} - 3$

2.- Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.



- Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado x .
- Indica el dominio y el recorrido de dicha función.
- Representa la función en el cuadro de la izquierda.
- Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

Sol: a) $A(x) = x(6-x) = 6x - x^2$; b) $Dom(A) = (0,6)$ $Im(f) = (0,9]$; c); d) El máximo es el vértice (3,9), por tanto, las dimensiones serían 3x3 m, o sea, el área es máxima 9 en un cuadrado.

3.- Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^3 - x^2 - 9x + 9} \quad g(x) = (x-2) \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad h(x) = \frac{1-x}{x^2 - |x|}$$

Sol: Resueltos en clase; $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1, 3\}$ $Dom(g) = [-1, 1)$ $Dom(h) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

4.- Dadas las funciones: $f(x) = \frac{1}{2x-1}$; $g(x) = \frac{-3x}{x+3}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$.

- Utilizando las funciones $f(x)$ y $h(x)$, comprueba que la composición de funciones no es conmutativa.

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{2\left(\frac{-3x}{x+3}\right) - 1} = \frac{x}{2-x} \quad g \circ f = g(f(x)) = \frac{-3}{\frac{1}{2x-1}} = -3(2x-1) = -6x+3 \rightarrow \text{NO CONMUTATIVA} \rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

- Calcula la función inversa de g .

Para calcular la inversa, despejamos x en función de y :

$$g(x) = \frac{-3x}{x+3} \rightarrow y = \frac{-3x}{x+3} \rightarrow (x+3)y = -3x \rightarrow xy + 3y = -3x \rightarrow xy + 3x = -3y$$

$$x(y+3) = -3y \rightarrow x = \frac{-3y}{y+3}$$

Y si cambiamos una variable por otra: $x = \frac{-3y}{y+3} \leftrightarrow y = \frac{-3x}{x+3} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-3x}{x+3}$

Por tanto, vemos que la inversa de g coincide con g .

- Calcula: $g \circ g$

Si g coincide con su inversa, si componemos g con g deberemos obtener la identidad, veámoslo:

$$g \circ g = g(g(x)) = \frac{-3\left(\frac{-3x}{x+3}\right)}{\left(\frac{-3x}{x+3}\right) + 3} = \frac{\frac{9x}{x+3}}{\frac{-3x+3x+9}{x+3}} = \frac{9x}{9} = x$$

d) ¿Cuál es la función $z = g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g$?

Como $g \circ g = x = \text{Identidad}$ entonces la composición de un número impar de veces de g da como resultado g :

$$z = g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g = I \circ I \circ I \circ I \circ g = I \circ g = g$$

Así que $z(x) = g(x) = \frac{-3x}{x+3}$

5.- (1,5 puntos)

a) Con la ayuda del gráfico de la derecha, encuentre el valor de x para el que: $g(h(x)) = 0$

En el dibujo de g , vemos que $g(h(x)) = 0 \Leftrightarrow g(-3) = 0$

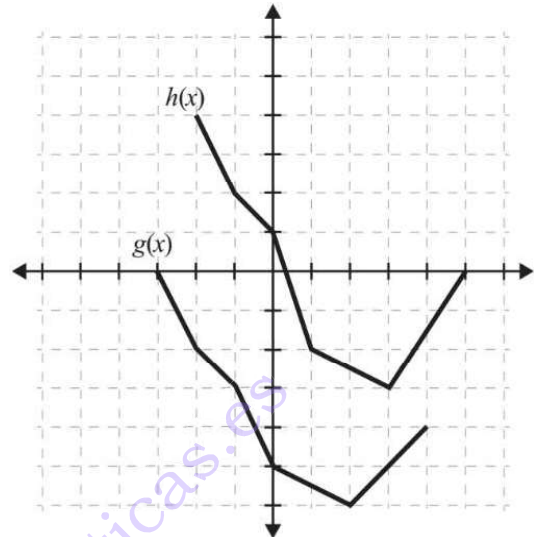
Por tanto, buscamos el punto donde $h(x) = -3$.

Y esto ocurre en $h(x) = -3 \Leftrightarrow x = 3$

Por tanto, en $x=3$, la composición: $g \circ f = g(f(x)) = g(f(3))$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(f(3)) = 0$$

El valor de x es $x=3$



b) Sean las funciones f y g dadas por:

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 5 \quad \text{y} \quad g(x) = -x - 2$$

¿Cuál es la expresión de $-f(-g(-x))$?

La función $-f(x) = -2x^2 + 6x - 5$ y $g(-x) = -(-x) - 2 = x - 2 \rightarrow -g(-x) = -x + 2$

Por tanto, sustituyendo una en otra tenemos:

$$-f(-g(-x)) = -2(-x+2)^2 + 6(-x+2) - 5 = -2x^2 - 8 + 8x - 6x + 12 - 5 = -2x^2 + 2x - 1$$

$$\text{Y por tanto: } -f(-g(-x)) = -2x^2 + 2x - 1$$

c) Escribe la función $g(x) = \sqrt{x-6}$ como composición de otras dos funciones.

Por ejemplo, sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x-6 \rightarrow g(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x)) = \sqrt{x-6}$ (Pueden haber más)

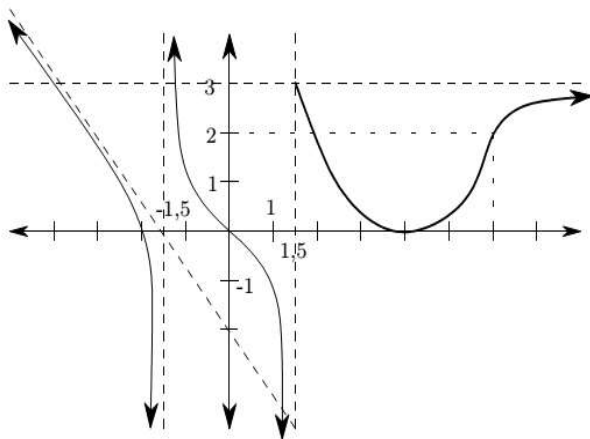
6.- (1,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 6}{5x - 1} = \frac{4}{9}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} = \sqrt{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = 0$

7.- (0,5 puntos) Calcula los siguientes límites:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = 3 \end{cases}$

d) $f(\frac{3}{2}) = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$