

1.- Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cdot \cos(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ es continua.

La función f es una función a trozos compuesta por 3 ramas de las cuales 2 son polinómicas y por tanto continuas y derivables en todo el cuerpo de los números reales. La otra rama es la suma entre una polinómica y una circular, que también son siempre continuas y derivables. Por tanto, solo tendríamos que fijarnos en los puntos donde la función cambia de rama. Es decir, en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.

a) Determina a y b .

Para determinar a y b , como nos dice que la función es continua, solo basta con hacer los límites laterales en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.

Continuidad en $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 + 2a \cdot \cos(x)] = 0 + 2a \end{aligned} \right\} \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

Continuidad en $x=\pi$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} [x^2 + 2a \cdot \cos(x)] = \pi^2 - 2a \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} [ax^2 + b] = a\pi^2 + b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{si } a=1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} [x^2 + 2 \cdot \cos(x)] = \pi^2 - 2 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} [x^2 + b] = \pi^2 + b \end{cases} \rightarrow -2 = b \rightarrow b = -2$$

Por tanto, $a=1$ y $b=-2$.

b) Estudia la derivabilidad de f .

$$\text{Conocidas } a \text{ y } b, \text{ la función queda de la forma: } f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 \cdot \cos(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Sabemos que una función f es derivable en un punto, x_0 , si existe el límite, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Calculamos estos límites por la izquierda y por la derecha en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.

Derivabilidad en $x=0$: ($f(0) = 0^2 + 2 \cdot \cos(0) = 2$)

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(3x + 2) - 2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x} = 3 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + 2 \cos(x)) - 2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

Por tanto: $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ y la función no es derivable en $x=0$.

Derivabilidad en $x=\pi$: ($f(\pi) = \pi^2 - 2$)

$$\begin{aligned} f'(\pi^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{((\pi + h)^2 + 2 \cos(\pi + h)) - (\pi^2 - 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{\pi^2} + 2h\pi + h^2 - 2 \cos(h) - \cancel{\pi^2} + 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h\pi}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - 2 \cos(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h + 2\pi) + \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - 2 \cos(h)}{h} \right)^* = 2\pi + 0 = 2\pi \end{aligned}$$

$$f'(\pi^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((\pi+h)^2 - 2) - (\pi^2 - 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{\pi^2} + 2h\pi + h^2 \cancel{- 2} - \cancel{\pi^2} \cancel{- 2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h'(h+2\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2\pi) = 2\pi$$

El límite del paréntesis lo hacemos a parte:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos(h))}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos(h)) \cdot 1 + \cos(h)}{h \cdot 1 + \cos(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2(h))}{h \cdot (1 + \cos(h))} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\sin^2 h)}{h \cdot (1 + \cos h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin h}{(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \rightarrow h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin h}{(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin h}{(1 + \cos h)} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

En la que hemos utilizado lo visto en el punto 6.4.2.3 de funciones equivalentes en un punto

Por tanto, la función es derivable en $x=\pi$.

Así que en resumen la función es continua en $\mathbb{R}$, para $a=1$ y $b=-2$ y es derivable en $\mathbb{R}^$*

2.- Calcula el dominio de la función: $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x^2-1}}$

El dominio de $\ln(x+3)$ son los valores de x que verifiquen $x+3 > 0 \rightarrow x > -3$

Y el dominio de $\sqrt{x^2-1}$ son los valores de x que verifiquen $x^2-1 > 0 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Por tanto, el dominio de: $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x^2-1}}$ es $Dom(f) = (-3, -1) \cup (1, +\infty)$

3.- Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x + \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.

El cálculo de la derivada de una función en un punto **a**, nos permite escribir la ecuación de la **recta tangente** a la gráfica en el punto de abscisas **a**, utilizando la ecuación punto pendiente:

$$y = m(x - a) + b$$

Donde **m** es la pendiente de la recta y **b** la ordenada en el origen. $\begin{cases} m = f'(a) \\ b = f(a) \end{cases}$

La **recta normal** a una gráfica en un punto x_0 , es la recta perpendicular a la recta pendiente en dicho punto.

Empezamos calculando la derivada de f :

$$f(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En el punto de abscisa 4, $x=4$

$$f'(4) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

La pendiente es $m = \frac{5}{4}$

En el punto $x=4$, tenemos:

$$f(4) = 4 + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$$

La ordenada en el origen $b=6$

Con estos datos, la ecuación de la recta tangente en $x=4$ es: $y = m(x - a) + b \rightarrow y = \frac{5}{4}(x - 4) + 6$ que escrita con la ecuación general es:

$$r_{\text{tangente}} : 5x - 4y + 4 = 0$$

Y la recta normal en el mismo punto es: $y = -\frac{1}{m}(x - a) + b \rightarrow y = -\frac{4}{5}(x - 4) + 6$ que escrita con la ecuación general es:

$$r_{\text{normal}} : 4x + 5y - 46 = 0$$

4.- Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+x}$$

$$g(x) = 3 \cdot \sin^2(3x) \rightarrow g'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 9 \cdot \sin(6x)$$

$$h(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow h'(x) = \frac{-2 \cdot (x^2-1)^2 - (-2x \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2 \cdot (x^2-1)^2 + 8x^2 \cdot (x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(-2 \cdot (x^2-1) + 8x^2) \cdot (x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{(-2 \cdot (x^2-1) + 8x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2 + 2 + 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3}$$

$$t(x) = e^x \cdot \cos x + 2^4 \rightarrow t'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x \cdot (\cos x - \sin x)$$

5.- Obtén razonadamente los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x^2 + x - 2)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-1)} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - x^2} \cdot \frac{1 + x\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{(1 - x^2)(1 + x\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \cdot (x^2 + x + 1)}{(1-x) \cdot (1+x) \cdot (1+x\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1)}{(1+x) \cdot (1+x\sqrt{x})} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x-2}{4x+3} \right)^{2x} = \left(\frac{5-2}{4+3} \right)^2 = \left(\frac{3}{7} \right)^2 = \frac{9}{49}$$

6.- Calcula la derivada de la función: $f(x) = x^{\sin x}$

Se trata de una función elevado a otra, así que derivaremos utilizando la derivación logarítmica:

$$y = x^{\sin x} \rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x \rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$$

Derivamos:

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

Despejamos y' :

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \rightarrow y' = y \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$$

Y sustituyendo y por $f(x)$:

$$f'(x) = x^{\operatorname{sen} x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$$

Así que la derivada de $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ es $f'(x) = x^{\operatorname{sen} x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$

7.- Sabiendo que la función $f(x) = 6x + 5$ y que $(g \circ f)(x) = 2x - 1$.

Marca con x la expresión algebraica de la función $g(x)$.

☐ $-4x - 6$
☒ $\frac{x-8}{3}$
☐ $\frac{x-2}{3}$
☐ $3x - 6$
☐ $4x + 4$

Si de $6x$ pasamos a $2x$, tenemos que dividir por 3. Así que si probamos con la segunda:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) - 8}{3} = \frac{6x + 5 - 8}{3} = \frac{6x - 3}{3} = 2x - 1$$

Claramente la tercera no funciona porque da $2x + 1$, y las otras las desechamos por no dividir por 3.

Por tanto $g(x) = \frac{x-8}{3}$

6.- Calcula la derivada enésima de la función: $f(x) = e^{-3x}$

Empezamos calculando la primera derivada: $f'(x) = -3e^{-3x}$

Calculamos la segunda: $f''(x) = -3e^{-3x} \cdot (-3) = (-3)^2 \cdot e^{-3x}$

Calculamos la tercera: $f'''(x) = 3^2 e^{-3x} \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot e^{-3x}$

Por lo tanto, cabe esperar que la derivada n -ésima sea:

$$f^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$$

Vamos a demostrarlo por inducción:

Sea $f^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$, entonces su siguiente derivada será: $f^{(n+1)}(x) = (-3)^{n+1} \cdot e^{-3x}$, vamos a ver:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} (-3)^n e^{-3x} = (-3)^n e^{-3x} \cdot (-3) = (-3)^{n+1} \cdot e^{-3x}$$

Por tanto, queda demostrado por inducción que: $f^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$