Solución examen XII

1.- Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto (0, 2) y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa *x=1* es la recta *x+y=3.*

La función será de la forma: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Si calculamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad f''(x)=6ax+2b$$

Como tiene un extremo relativo en (0,2) $\begin{cases} f(0)=2 & \rightarrow & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=2 & \rightarrow & d=2 \\ f'(0)=0 & \rightarrow & 3a\cdot 0^2+2b\cdot +c=0 & \rightarrow & c=0 \end{cases}$

Como la recta tangente en el punto *x=1* es *y=3-x* y la pendiente m=-1

$$f'(1)=-1 \quad \rightarrow \quad 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+0=-1 \quad \rightarrow \quad 3a+2b=-1$$

Además, la ecuación de la recta tangente es: $y-y_o=m(x-x_o)$ y en el punto x=1:

$$y-y_o=-1(x-1) \quad \rightarrow \quad y-y_o=-x+1 \quad \rightarrow \quad y=(1+y_o)-x$$

Por tanto, comparando ambas: $y=3-x \quad \leftrightarrow \quad y=(1+y_o)-x$

$$3=(1+y_o) \quad \rightarrow \quad y_o=3-1=2$$

Y por tanto: $f(1)=2 \quad \rightarrow \quad a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=2 \quad \rightarrow \quad a+b+c+d=2$

Si agrupamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 3a+2b=-1 \\ a+b+c+d=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a+2b=-1 \\ a+b+0+2=2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=-1 \\ a+b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Por tanto, a=-1, b=1, c=0 y d=2 y entonces la función: $f(x)=-x^3+x^2+2$

2.- Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos, viene dada por:

$$h(t)=5-5t-5e^{-2t}$$

a) ¿Cuál es el dominio de la altura?
b) Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.
c) Teniendo en cuenta que la velocidad es la derivada de la posición, $V(t)=h'(t)$, halla la velocidad al cabo de 2 segundos.

a) Sabemos que el tiempo no es negativo, así que $t\geq 0$, y además sabemos que la altura tampoco puede ser negativa:

$$h(t)=5-5t-5e^{-2t}\geq 0$$

Como igualar a cero da una ecuación un poco extraña: $5-5t-5e^{-2t}=0 \quad \rightarrow \quad 1-t-e^{-2t}=0$
Tanteamos un poco con la calculadora:

$$h(0)=5-5=0 \qquad h(1)=5-5-\frac{5}{e^2}=-0,68 \qquad h(0,8)=5-4-\frac{5}{e^{1,6}}=-0,0095$$

Así que el dominio es [0, 0,8) aproximadamente.

b) Para encontrar la altura máxima, vamos a derivar la función altura y la vamos a igualar a cero.

$$h'(t) = -5 + 10e^{-2t} \quad \rightarrow \quad h'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 + 10e^{-2t} = 0 \quad \rightarrow \quad -2t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad t = 0,35\ seg$$

Por tanto, la altura máxima se consigue en t=0,35 seg, y ésta será:

$$h(0,35) = 5 - 5\cdot 0,35 - 5e^{-2\cdot 0,35} = 0,77m$$

Así que la altura máxima es 77 centímetros.

c) La velocidad al cabo de dos segundos es:

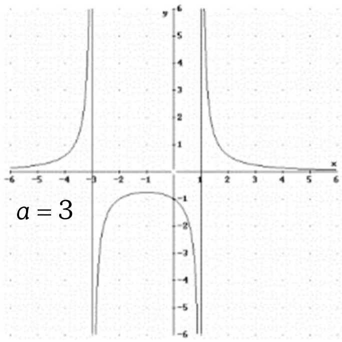
$$V(2) = h'(2) = -5 + \frac{10}{e^4} = -4,81 m\cdot s^{-1}$$

Aunque no tiene ningún sentido puesto que a los dos segundos el cuerpo ya ha caído.

No se puede calcular la velocidad en un punto que no pertenece al dominio.

3.- Determina *a, b, c,* para que la curva a la siguiente: $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$

Como la función tiene grado 2 en el denominador, las raíces coinciden con las asíntotas verticales de la gráfica:



$$(x+3)\cdot(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

Así que b=2 y c=3.

Y si nos fijamos en la gráfica, sabemos que *f(0)=-1*, por tanto:

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{a}{x^2 + 2x - 3} \quad \rightarrow \quad f(0) = \frac{a}{0^2 + 2\cdot 0 - 3} = -1 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Y la función será: $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$

4.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en su punto de inflexión.

Primero calculamos el punto de inflexión, y para ello nos ayudaremos de la segunda derivada:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x - (x+1)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{-x}{e^x}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{e^x} \qquad f''(x) = -\frac{e^x - x\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(x-1)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{x-1}{e^x}$$

Igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{x-1}{e^x} \quad \rightarrow \quad f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{e^x} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

Por lo que su punto de inflexión está en *x=1*.

Y la recta tangente será: $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

$$\text{Calculamos: } f(1) = \frac{2}{e} \quad y \quad f'(1) = \frac{-1}{e}$$

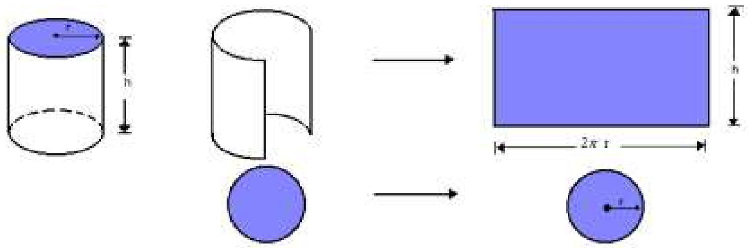
Por tanto, la recta tangente será:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \rightarrow \quad y - \frac{2}{e} = \frac{-1}{e}(x-1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{(3-x)}{e}$$

5.- Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 cm^3. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser dichas dimensiones?

Si nos fijamos en el dibujo, el área de un vaso de cristal con forma cilíndrica viene dada por: $A(r,h)=\pi r^2+2\pi r\cdot h$

Como la función área depende de dos variables, tenemos que buscar una relación entre las variables, para poder dejarla en función de una sola de ellas.



Como sabemos que el volumen es de 250 cm^3, y además sabemos que el volumen de un cilindro viene dado por la expresión: $V_{cil}=\pi\cdot R^2\cdot h$, entonces:

$$V_{cil}=250 \quad\to\quad \pi\cdot R^2\cdot h=250 \quad\to\quad h=\frac{250}{\pi\cdot R^2}$$

Expresamos ahora la función área en función de una sola variable:

$$A(r,h)=\pi r^2+2\pi r\cdot h \quad\to\quad A(r)=\pi r^2+2\cancel{\pi}\cancel{r}\frac{250}{\cancel{\pi}\cdot r^{\cancel{2}}}=\pi r^2+\frac{500}{r}=\frac{\pi r^3+500}{r} \quad\to\quad A(r)=\frac{\pi r^3+500}{r}$$

Derivamos la función área:

$$A(r)=\frac{\pi r^3+500}{r} \quad\to\quad A'(r)=\frac{3\pi r^3-\left(\pi r^3+500\right)}{r^2}=\frac{2\pi r^3-500}{r^2}$$

E igualamos a cero:

$$A'(r)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\pi r^3-500}{r^2}=0 \quad\to\quad 2\pi r^3-500=0 \quad\to\quad r=\sqrt[3]{\frac{500}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}=4,3\ cm$$

Y de aquí: $h=\frac{250}{\pi\cdot(4,3)^2}=4,3\ cm$ Faltaría comprobar que es mínimo, y para ello vemos el signo de A”(4,3):

$$A'(r)=\frac{2\pi r^3-500}{r^2} \quad\to\quad A''(r)=\frac{6\pi r^2\cdot r^2-2r\left(2\pi r^3-500\right)}{r^4}=\frac{2\pi r^3+1000}{r^3} \quad\to\quad A''(4,3)>0$$

Así que las dimensiones del cilindro son: 4,3 cm de alto y 4,3 cm de radio.

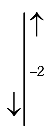
6.- Sea *f* la función definida por: $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de *f*.
c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de *f*.

a) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$ por tanto, es posible que haya una asíntota vertical en x=-2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x^2}{x+2}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x^2}{x+2}=\frac{4}{0^+}=+\infty\end{array}\right\} \quad\to$$

la función ***f*** presenta una ***Asíntota Vertical en x=-2.***



Veamos si tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+2}=\pm\infty \quad\to$$

la función ***f* no tiene asíntota horizontal.**

Estudiamos el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2x}=1$

y a continuación estudiamos el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

Por tanto, la función ***f* presenta una asíntota oblicua en la dirección y=x-2.**

b) para estudiar la monotonía nos ayudamos de la primera derivada:

$$f(x)=\frac{x^2}{x+2} \quad \to \quad f'(x)=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2} \quad \to \quad f'(x)=0 \quad \to \quad x(x+4)=0$$

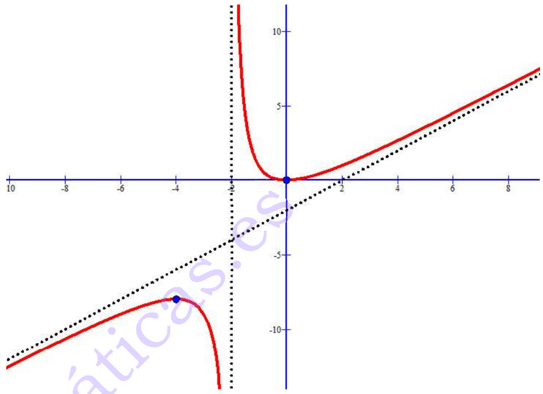
Igualamos a cero y obtenemos los valores: $x_1=-4$ y $x_2=0$

Y si nos ayudamos de la siguiente tabla:

x	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
f'(x)	+	-	-	+
f(x)	↗	↘	↘	↗
	Máx (-4,-8)		*Min (0,0)*	

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+2} = \pm\infty$ los extremos son relativos.

Por tanto: $f:\begin{cases} \textit{creciente en } (-\infty,-4)\cup(0,+\infty) \\ \textit{decreciente en } (-4,-2)\cup(-2,0) \end{cases}$



c) El boceto de la gráfica sería:

7.- Calcula: $\lim_{x\to0} \frac{x\cdot\sin x}{\tan x^2}$

Como $\lim_{x\to0} \frac{x\cdot\sin x}{\tan x^2} = \frac{0}{0}$, aplicaremos la Regla de L´Hopital que dice que:

Sean *f* y *g* dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones *f* y *g* son derivables en un entorno E del punto a.
- ✓ *f(a)=g(a)=0*
- ✓ Existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Por tanto, el límite cuando $x\to0$, es:

$$\lim_{x\to0} \frac{x\cdot\sin x}{\tan x^2} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to0} \frac{\sin x + x\cos x}{\left[1+\tan^2\left(x^2\right)\right]\cdot 2x} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x + \cos x - xsenx}{2\left[1+\tan^2\left(x^2\right)\right] + 2x\cdot 2\tan\left(x^2\right)\left[1+\tan^2\left(x^2\right)\right]\cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2\cos x - xsenx}{2\left[1+\tan^2\left(x^2\right)\right] + 8x^2\tan\left(x^2\right)\left[1+\tan^2\left(x^2\right)\right]} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{x\cdot\sin x}{\tan x^2} = 1$$