



1.- (1,5 puntos) Halla el valor de x para que los vectores $\vec{v} = (7, x)$ y $\vec{u} = (3, -4)$:

a) Sean paralelos

Para que sean paralelos, han de ser proporcionales:

$$\frac{3}{7} = \frac{-4}{x} \rightarrow 3x = -28 \rightarrow x = -\frac{28}{3}$$

b) Sean Perpendiculares

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \leftrightarrow (7, x) \cdot (3, -4) = 0 \leftrightarrow 21 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{21}{4}$$

c) Sean coplanarios

Que sean coplanarios, implica que estén en el mismo plano. Y eso ocurre siempre ya que estamos trabajando en el plano $\mathbb{R}^2$, así que x puede valer cualquier cosa. $x \in \mathbb{R}$

d) Sean linealmente independientes.

Para que sean linealmente independientes, basta que no sean paralelos o proporcionales, por tanto $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{28}{3} \right\}$

e) Sean un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$

Que sean sistema de generadores, quiere decir que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se pueda escribir como combinación lineal de estos dos vectores, por tanto, la respuesta es la misma que en el apartado anterior. (Con que no sean paralelos, ya nos vale) $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{28}{3} \right\}$

f) Formen una base ortonormal

Para que formen una base ortonormal, ha de ser base, han de ser ortogonales y han de ser unitarios, como el vector $\vec{u}$ no es unitario, nunca serán base ortonormal, y por tanto no existe x que verifique eso. $\nexists x \in \mathbb{R}$

2.- (1 punto) Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

Empezaremos calculando ambos vectores:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (3, 1) + (2, 3) = (5, 4) \\ \vec{u} - \vec{v} = (3, 1) - (2, 3) = (1, -2) \end{cases}$$

Para calcular el ángulo que forman, utilizaremos el producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{(5, 4) \cdot (1, -2)}{\sqrt{25+16} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{5-8}{\sqrt{205}} = \frac{-3}{\sqrt{205}}$$

$$\alpha = 102^\circ 5' 41,13''$$



3.- (1,25 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (3, 1)$, y $\vec{w} = (2, 0)$:

a) Calcula las coordenadas del vector $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

Sustituyendo:

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = 2(1, -2) - (3, 1) + \frac{1}{3}(2, 0) = \left(2 - 3 + \frac{2}{3}, -4 - 1 + 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, -5\right)$$

b) Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Para escribir un vector como combinación lineal de otros dos:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \rightarrow (2, 0) = \alpha(1, -2) + \beta(3, 1) \rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha + 3\beta \\ 0 = -2\alpha + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 = 2\alpha + 6\beta \\ 0 = -2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\text{Y sumando ambas ecuaciones: } 4 = 7\beta \rightarrow \beta = \frac{4}{7}$$

Y de la primera ecuación:

$$2 = \alpha + 3\beta \rightarrow 2 = \alpha + 3 \cdot \frac{4}{7} \rightarrow \alpha = 2 - \frac{12}{7} = \frac{14 - 12}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Por tanto: } \vec{w} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v}$$

c) Calcula los ángulos que forman dos a dos.

$$\text{Ángulo } \vec{u} \text{ y } \vec{v} : \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{3 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 81^\circ 52' 11,63''$$

$$\text{Ángulo } \vec{u} \text{ y } \vec{w} : \vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \beta = 63^\circ 26' 5,82''$$

$$\text{Ángulo } \vec{v} \text{ y } \vec{w} : \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \phi \rightarrow \cos \phi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{6}{\sqrt{10} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \rightarrow \phi = 18^\circ 26' 5,82''$$

Vemos que claramente que $\alpha = \beta + \phi$

d) Halla un vector $\vec{z}$ con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$

Lo único que hay que hacer es normalizar $\vec{u}$ y después multiplicarlo por $\sqrt{20}$

Calculamos el módulo de $\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \rightarrow \hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\text{Ya solo nos queda multiplicar por } \sqrt{20}: \vec{z}_1 = \sqrt{20} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right) = (2, -4)$$

Aunque también nos vale su opuesto: $\vec{z}_2 = (-2, 4)$



e) Halla un vector ortonormal a $\vec{v}$

Ortonormal quiere decir ortogonal y unitario, así que ortogonal es:

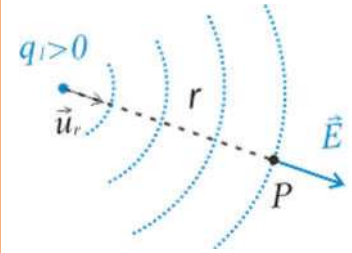
$$\vec{v} = (3, 1) \rightarrow \vec{v}_{\perp} = (-1, 3)$$

Y ahora solo nos falta normalizar, es decir que tenga módulo 1.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \rightarrow \hat{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\|\vec{v}_{\perp}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3) = \left(\frac{-\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$$

Aunque también sería correcto su opuesto: $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10} \right)$

4.- (1 punto) Como ya sabéis, el campo eléctrico creado por una carga en un punto P, es una magnitud vectorial que viene dada por la expresión $\vec{E} = K \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{u}_r$, donde K es la constante eléctrica que en el vacío vale $9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$ y donde $\hat{u}_r$ es un vector unitario en la dirección de r.



Calcula el vector campo eléctrico creado por una carga positiva de $2 \mu\text{C}$ en el punto P(2,3) m sabiendo que está situada en el origen de un sistema de coordenadas.

Lo primero es calcular el vector unitario en la dirección de r:

$$\vec{r} = P - O = (2, 3) \rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right)$$

Y después utilizamos la fórmula que nos dan:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{u}_r = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{13 \text{ m}^2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right) = (768, 1152) = (768\hat{i} + 1152\hat{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

5.- (0,5 + 0,75 puntos) Sea el triángulo de vértices A(4,2), B(13,5) y C(6,6).

a) Halla la ecuación segmentaria de la altura que pasa por el vértice C.

Como deberíais saber, la altura de un triángulo es la recta perpendicular a la base y que pasa por el otro vértice. Por tanto, cogemos un vector perpendicular al vector AB y con el punto c, ya tenemos la recta. Si lo hacemos usando la ecuación continua:

$$\overline{AB} = B - A = (13, 5) - (4, 2) = (9, 3) \rightarrow V_{\perp AB} = (1, -3) \rightarrow \frac{x - c_x}{v_x} = \frac{y - c_y}{v_y}$$

Así que sustituyendo:

$$\frac{x - 6}{1} = \frac{y - 6}{-3} \rightarrow -3(x - 6) = y - 6 \rightarrow 3x + y - 24 = 0$$

Obtenemos la ecuación general, y de esta, la segmentaria:

$$3x + y - 24 = 0 \rightarrow 3x + y = 24 \rightarrow \frac{3x}{24} + \frac{y}{24} = 1 \rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{24} = 1$$



b) Calcula la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

Empezamos calculando la ecuación de la recta que pasa por A y B:

$$\overline{AB} = (3,1) \rightarrow x - 3y + k = 0 \rightarrow 13 - 3 \cdot 5 + k = 0 \rightarrow k = 2 \rightarrow x - 3y + 2 = 0$$

Donde hemos usado un haz de rectas paralelas.

La intersección entre la base y la altura me dará el punto D, en el que la altura corta en dos segmentos al lado AB.

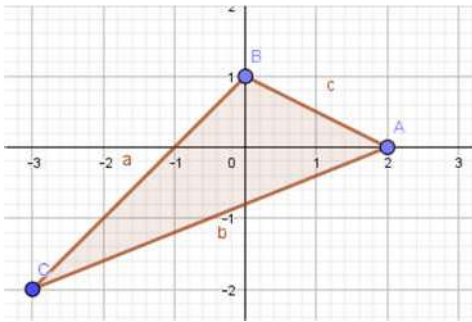
$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + y = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 9x + 3 = 72 \end{cases} \rightarrow 10x = 70 \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow D(7,3)$$

Si calculamos los vectores $\begin{cases} \overline{AD} = D - A = (7,3) - (4,2) = (3,1) \\ \overline{DB} = B - D = (13,5) - (7,3) = (6,2) \end{cases}$

Y obtenemos sus módulos, obtendremos las longitudes de cada uno de los segmentos.

$$\|\overline{AD}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \|\overline{DB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

6.- (0,75 + 0,5 puntos) Considérese, en el plano, el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(-3,-2). Calcula los ángulos y el área de ese triángulo.



Como podemos ver gráficamente, B=105, A=60 y C=

Calculamos los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = B - A = (-2,1) \quad \text{y} \quad \overline{AC} = C - A = (-5,-2)$$

Y ayudándonos del producto escalar calculamos el ángulo A:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\| \cos A \rightarrow \cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\|} = \frac{10 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{29}} = \frac{8}{\sqrt{145}} \rightarrow A = 48^\circ 21' 59,26''$$

Repitiendo para los ángulos B y C:

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\| \cos B \rightarrow \cos B = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\|} = \frac{-6 + 3}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{-3}{3\sqrt{10}} \rightarrow B = 108^\circ 16' 5,82''$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CA} = \|\overline{CB}\| \|\overline{CA}\| \cos C \rightarrow \cos C = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{\|\overline{CB}\| \|\overline{CA}\|} = \frac{15 + 6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{29}} = \frac{21}{\sqrt{522}} \rightarrow C = 23^\circ 11' 54,93''$$

Para calcular el área podemos utilizar la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde S es el semiperímetro.

Calculemos los lados:



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= B - A = (-2, 1) \quad \leftrightarrow \quad c = \|\overline{AB}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \overline{AC} &= C - A = (-5, -2) \quad \leftrightarrow \quad b = \|\overline{AC}\| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \\ \overline{BC} &= C - B = (3, 3) \quad \leftrightarrow \quad a = \|\overline{BC}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$A = \sqrt{s(s - 3\sqrt{2})(s - \sqrt{29})(s - \sqrt{5})} = 4,5 \text{ u}^2$$

7.- (1,25 puntos) Los puntos A(1,-1) y B(1,4) son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta $x+y-1=0$.

Si llamamos C al punto de la recta r, entonces este punto tiene que verificar su ecuación, por tanto las coordenadas de C son las coordenadas genéricas de cualquier punto de la recta, es decir: $C = (x, 1-x)$

Además, como dice que es rectángulo en A, entonces el producto escalar de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ha de ser nulo. Veámoslo:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= B - A = (1, 4) - (1, -1) = (0, 5) \quad \text{y} \quad \overline{AC} = C - A = (x, 1-x) - (1, -1) = (x-1, 2-x) \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 0 \quad \rightarrow \quad (0, 5) \cdot (x-1, 2-x) = 0 \quad \rightarrow \quad 5(2-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2\end{aligned}$$

Por tanto el punto C es el punto $C=(2,-1)$

8.- (1,5 puntos) Dadas las rectas $r : (k-1)x - 2y + 2k = 0$ y $s : (3k-4x) + y + k^2 = 0$ encuentra los valores de k para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Para que sean perpendiculares sus vectores directores han de ser ortogonales, y por tanto su producto escalar ha de ser nulo.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (2, k-1) \quad \text{y} \quad \vec{s} = (1, 4) \quad \rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad (2, k-1) \cdot (1, 4) = 0 \\ 2 + 4k - 4 &= 0 \quad \rightarrow \quad 4k - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Así que $k=1/2$

Si sustituimos en las rectas:

$$\begin{aligned}r : (k-1)x - 2y + 2k &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-x}{2} - 2y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x + 4y = 2 \\ s : (3k-4x) + y + k^2 &= 0 \quad \rightarrow \quad -4x + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 16x - 4y = 7\end{aligned}$$

Y resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 16x - 4y = 7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 17x = 9 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{17}$$

$$x + 4y = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2-x}{4} = \frac{25}{68} \quad \text{y por tanto el punto de intersección es: } \left(\frac{36}{68}, \frac{25}{68}\right)$$