

1.- Opera paso a paso (1 punto):

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} - (\sqrt[3]{2})^2 + \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \right) - (\sqrt[3]{2^2}) + \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} \cdot \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-3} \right) = (\sqrt[3]{2^2}) - (\sqrt[3]{2^2}) - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

2.- Simplifica la siguiente fracción algebraica (1,5 puntos):

$$\frac{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2-7x+10}} = \frac{\frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot 2(x-5) \cdot (x+1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1}}{\frac{2(x+1)}{(x-1) \cdot (x+2)} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-5)}{(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+1)}} = \frac{\frac{2(x-5)}{(x+1)}}{\frac{2(x-5)}{(x+1)}} = 1$$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones (1,5 puntos):

a) $\sqrt[3]{x-2} = -x \rightarrow (\sqrt[3]{x-2})^3 = (-x)^3 \rightarrow x-2 = -x^3 \rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \rightarrow (x-1) \cdot (x^2 + x + 2) = 0 \rightarrow x = 1$

b) $2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2} \rightarrow 2^x \cdot (2^2 - 2 + 1) = \frac{1}{2} \rightarrow 3 \cdot 2^x = \frac{1}{2} \rightarrow 2^x = \frac{1}{6} \rightarrow x \cdot \ln 2 = \ln 1 - \ln 6 \rightarrow x = -\frac{\ln 6}{\ln 2} = -2,58$

c) $\log \sqrt{x-1} = \log(x+1) - \log \sqrt{x+4} \rightarrow \log \sqrt{x-1} = \log \frac{(x+1)}{\sqrt{x+4}} \rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{(x+1)}{\sqrt{x+4}} \rightarrow \sqrt{(x-1) \cdot (x+4)} = x+1$
 $(\sqrt{(x-1) \cdot (x+4)})^2 = (x+1)^2 \rightarrow (x-1) \cdot (x+4) = (x+1)^2 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x = 5$

4.- Resuelve la siguiente inecuación expresando el resultado mediante intervalos, desigualdades y gráficamente: (1 punto)

$$\frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$$

Como el denominador es positivo, para que el cociente sea positivo tiene que ocurrir que el numerador también sea positivo; por tanto:

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow (x+1) \cdot (x-1) > 0$$

Para que el producto sea positivo, ambos han de tener signo opuesto:

$$(x+1) \cdot (x-1) > 0 \begin{cases} \text{si } \begin{cases} x+1 > 0 & \rightarrow x > -1 \\ x-1 > 0 & \rightarrow x > 1 \end{cases} x > 1 \\ \text{si } \begin{cases} x+1 < 0 & \rightarrow x < -1 \\ x-1 < 0 & \rightarrow x < 1 \end{cases} x < -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty) \\ x \in \mathbb{R} / \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \\ 2 < x < +\infty \end{cases} \end{cases}$$



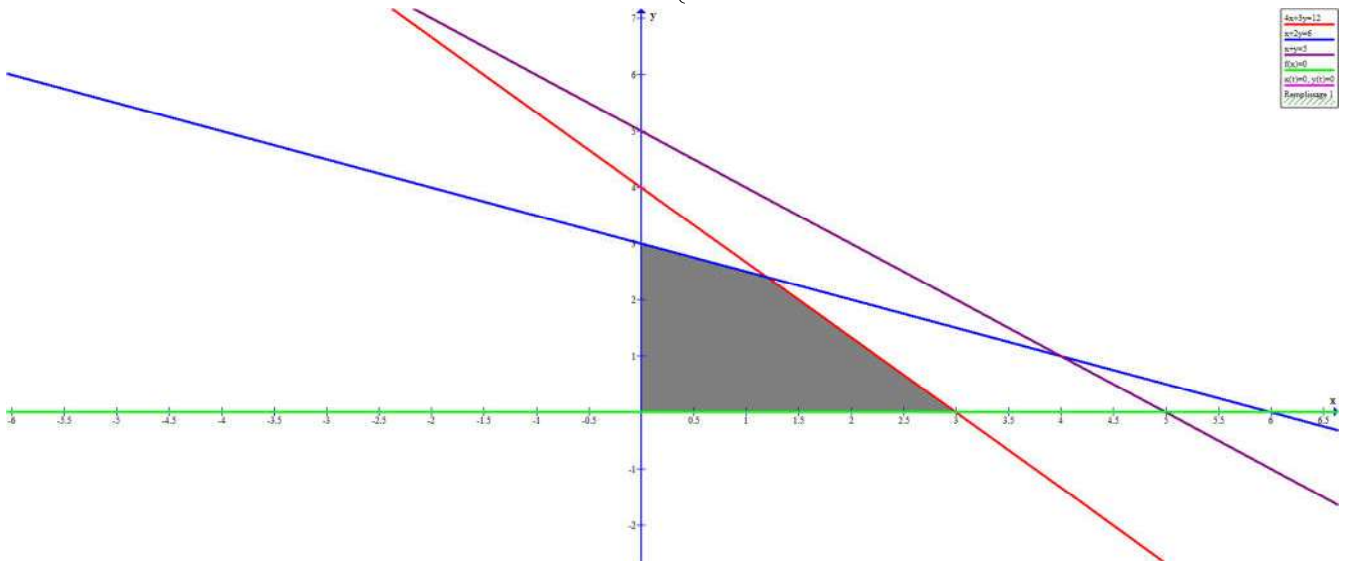
5.- Javier está haciendo reformas en casa. Ha agrandado la ventana del salón: ahora es 20 cm más alta y 30 cm más ancha. Con eso ha conseguido tener una ventana que es 0,99 m² más grande que la vieja. Además, ahora podrá poner una ventana de dos hojas cuadradas. ¿Cuáles eran las dimensiones de la ventana antes de la reforma? (1,5 puntos)

Si las dimensiones son x e y, tenemos que, expresando todo en centímetros: $\begin{cases} x \cdot y + 9900 = (y+20) \cdot (x+30) \\ 2(y+20) = x+30 \end{cases}$,

cuya solución da: **130 cm de alto y 270 cm de ancho.**

6.- Representa el siguiente recinto (1,5 pts):

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



7.- Dos amigos se encuentran después de mucho tiempo y empiezan a contarse sus vidas. (1 punto)

-¡No me digas que te has casado ya!

-Pues sí Julián, y tengo 3 preciosas hijas, que, por cierto, cumplen años hoy.

-¡Con 3 hijas ya! ¿Qué edades tienen?

-Pues mira, el producto de sus edades es 36 y su suma coincide con el número del portal de la casa donde vivías cuando íbamos al colegio.

Julián se queda pensando un minuto y finalmente dice

-Me temo que con lo que has dicho no puedo saberlo, necesito otro dato.

-Tienes razón, la mayor toca el piano.

Y con esto Julián ya sabía las edades de las 3 hijas. ¿Y tú? ¿Eres capaz de averiguarlo?

Si llamamos a, b y c a las edades de cada una de sus hijas, tenemos que:

$$a \cdot b \cdot c = 36$$

$$a + b + c = ?$$

Para resolver este acertijo es necesario razonar desde el punto de vista del encuestador que posee un dato que nosotros desconocemos. El encuestador conoce el número de la casa que representa la suma de las edades de las tres hijas.

Las posibilidades de un producto de tres números naturales igual a 36 son las siguientes:

Posibles edades:

$$1 \cdot 1 \cdot 36 = 36 \rightarrow 1 + 1 + 36 = 38$$

$$1 \cdot 2 \cdot 18 = 36 \rightarrow 1 + 2 + 18 = 21$$

$$1 \cdot 4 \cdot 9 = 36 \rightarrow 1 + 4 + 9 = 14$$

$$1 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \rightarrow 1 + 6 + 6 = 13$$

$$2 \cdot 2 \cdot 9 = 36 \rightarrow 2 + 2 + 9 = 13$$

$$2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 \rightarrow 2 + 3 + 6 = 11$$

$$3 \cdot 3 \cdot 4 = 36 \rightarrow 3 + 3 + 4 = 10$$

Como el encuestador conoce el número de la casa podría resolver el acertijo siempre y cuando no sea 13 el número de la casa porque en ese caso existirían dos posibilidades (1, 6 y 6 años ó 2, 2 y 9 años).

Por eso tiene que volver a la casa a solicitar más información. El último dato aportado por la señora («la mayor toca el piano») le permite decidir entre las dos opciones, porque ahora sabe que una de las hijas es mayor que las otras.

8.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones (1 punto):

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ \sqrt{x + y + 4} = y - x \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} x = 1 ; y = 4 \\ x = -1 ; y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 ; y = 4 \\ x = -1 ; y = -2 \end{cases}$$