



Solucion examen II

1.- (2 puntos) Responde justificadamente:

- a) Sabiendo que el vector $\vec{a} = (x, y)$ es perpendicular al vector $\vec{b} = (-3, 2)$ y que el módulo de $\vec{a}$ es $2\sqrt{13}$, halla los valores de x y de y.

Un vector perpendicular al vector $\vec{b} = (-3, 2)$, es el vector $\vec{c} = (2, 3)$, si dividimos por su módulo, tendremos un vector ortonormal:

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \rightarrow \hat{c} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$$

Y si queremos que su módulo sea $2\sqrt{13}$, solo nos queda multiplicar por dicho número:

$$\vec{a} = 2\sqrt{13} \cdot \hat{c} = 2\sqrt{13} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = (4, 6)$$

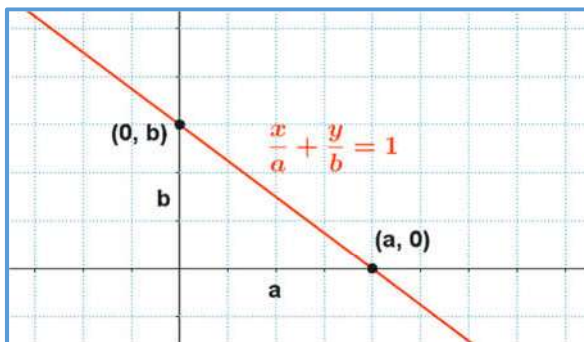
Por tanto, x=4 e y=6.

- b) Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto A (4,5) y forma con los semiejes positivos un triángulo de área 40 unidades cuadradas.

Sabemos que la ecuación segmentaria o canónica de una recta viene dada por la expresión:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Donde a es la coordenada x del punto de corte con el eje X, y b la coordenada y del punto de corte con el eje y.



Si el área del triángulo es 40, tendremos que:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = 40 \rightarrow a \cdot b = 80$$

Como la recta pasa por el punto (4,5), si sustituimos en la ecuación segmentaria, tenemos que:

$$\frac{4}{a} + \frac{5}{b} = 1$$

Así que con estas dos ecuaciones podemos formar un sistema:

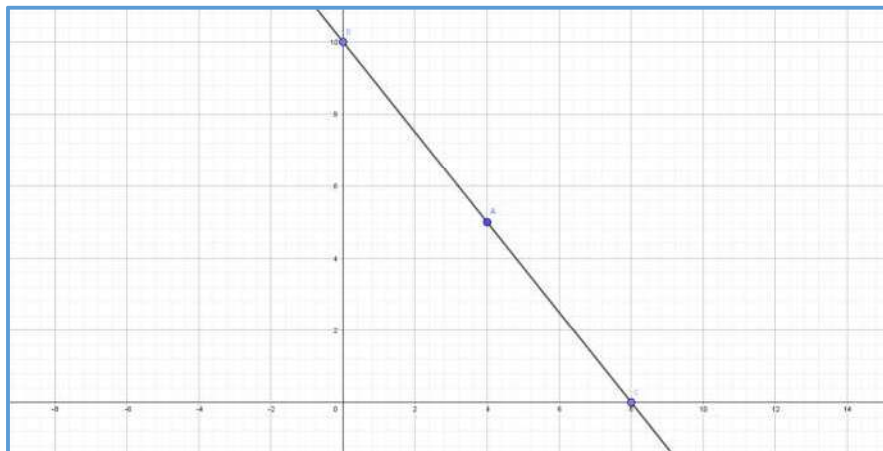
$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{5}{b} = 1 \\ a \cdot b = 80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{5}{b} = 1 \\ a = \frac{80}{b} \end{cases}$$

Que si resolvemos:

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{5}{b} = 1 \\ a = \frac{80}{b} \end{cases} \rightarrow \frac{4}{\frac{80}{b}} + \frac{5}{b} = 1 \rightarrow \frac{b}{20} + \frac{5}{b} = 1 \rightarrow b^2 - 20b + 100 = 0 \rightarrow b = 10$$



Y por tanto: $a = \frac{80}{b} = \frac{80}{10} = 8$



Así que la ecuación de la recta pedida en forma segmentaria será: $\frac{x}{8} + \frac{y}{10} = 1$

2.- (2 puntos) De un triángulo conocemos el vértice $A(0, 2)$, y las ecuaciones de dos alturas, $h_1 : y = -x$ y $h_2 : x - 3y - 2 = 0$. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo y los otros vértices.

Sabemos que las ecuaciones de las tres alturas de un triángulo pasan por algún vértice. Comprobamos si el punto A pertenece a alguna de las dos alturas dadas:

El punto $A(0, 2)$ no pertenece a la altura 1, porque no verifica su ecuación: $A(0, 2) \notin h_1 : y = -x$

El punto $A(0, 2)$ no pertenece a la otra porque tampoco la verifica: $A(0, 2) \notin h_2 : x - 3y - 2 = 0$

Así que, dos de los lados del triángulo, serán las rectas perpendiculares a ambas alturas que pasan por el punto A.

Lado 1: Si calculamos la recta perpendicular a la altura 1 que pasa por el punto A:

$$h_1 : x + y = 0 \rightarrow l_1 : x - y + k = 0 \rightarrow A(0, 2) \in l_1 \rightarrow l_1 : x - y + 2 = 0$$

Lado 2: Si calculamos la recta perpendicular a la altura 2 que pasa por el punto A:

$$h_2 : x - 3y - 2 = 0 \rightarrow l_2 : 3x + y + k = 0 \rightarrow A(0, 2) \in l_2 \rightarrow l_2 : 3x + y - 2 = 0$$

Una vez que tenemos las ecuaciones de los lados, podemos calcular los otros vértices, simplemente resolviendo los sistemas altura 1 y lado 2 y altura 2 con lado 1:

$$\text{Vértice B: } \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1 \quad \mathbf{B(1, -1)}$$



Vértice C: $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow -2y - 4 = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow x = -4$ **C(-4,-2)**

La ecuación del lado 3 será aquella que pasa por los vértices B y C.

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-4, -2) - (1, -1) = (-5, -1)$ y la ecuación de la recta la calculamos usando la ecuación continua:

$$\frac{x - P_x}{V_x} = \frac{x - P_y}{V_y} \rightarrow \frac{x - 1}{-5} = \frac{y + 1}{-1} \rightarrow -x + 1 = -5y - 5 \rightarrow x - 5y - 6 = 0$$

Así, las **ecuaciones de los lados** son: $\begin{cases} l_1 : x - y + 2 = 0 \\ l_2 : 3x + y - 2 = 0 \\ l_3 : x - 5y - 6 = 0 \end{cases}$ y los **vértices** son: $\begin{cases} A(0, 2) \\ B(1, -1) \\ C(-4, -2) \end{cases}$



3.- (2 puntos) Un rombo ABCD tiene su vértice A en el eje de ordenadas y otros dos vértices opuestos son B(3,1) y D(-5,-3). Determina:

a) Las coordenadas de los vértices A y C.

Una diagonal es la que pasa por los vértices B y D. Si calculamos su vector director, tenemos:

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (-8, -4) \text{ y por tanto la ecuación de la diagonal es: } D : x - 2y - 1 = 0$$

Vamos a calcular la otra diagonal, que va a ser la recta perpendicular que pasa por su punto medio. Primero calculamos el punto medio M:

$$M_{BD} = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (-1, -1)$$

Después la recta perpendicular que pasa por M.



$$2x + y + k = 0 \rightarrow -2 - 1 + k = 0 \rightarrow k = 3 \rightarrow d: 2x + y + 3 = 0$$

El vértice A será el punto de intersección entre la diagonal d y el eje y:

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y + 3 = 0 \rightarrow y = -3$$

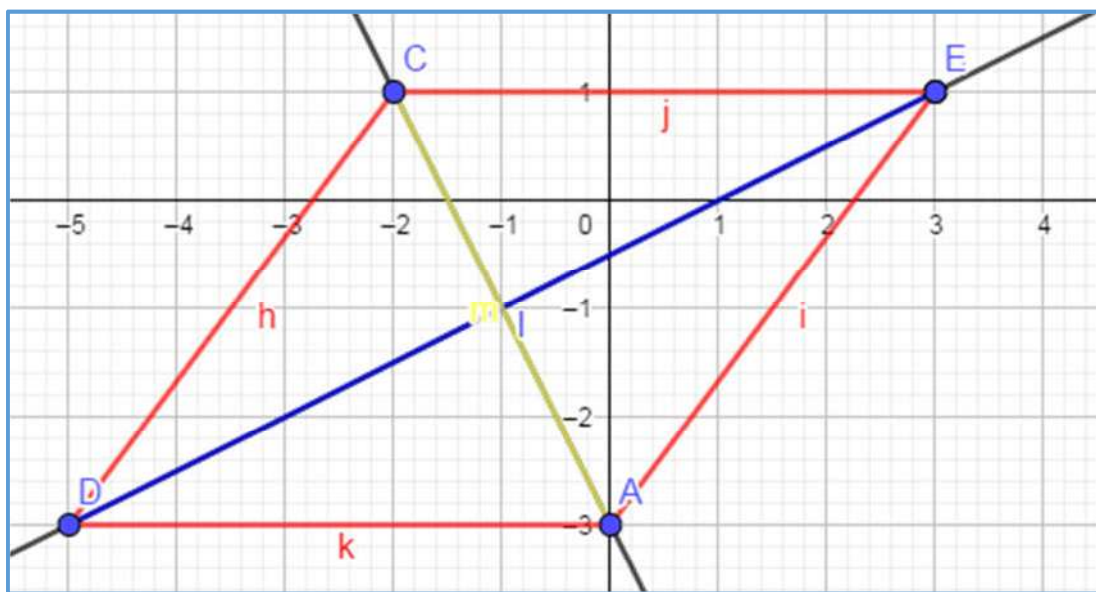
Por tanto el vértice A será: **A(0,-3)**

Y para calcular el vértice C basta con calcular el simétrico del punto A con respecto a M:

$$M_{AC} = \left(\frac{A_x + C_x}{2}, \frac{A_y + C_y}{2} \right) \rightarrow (-1, -1) = \left(\frac{0 + C_x}{2}, \frac{-3 + C_y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} -2 = 0 + C_x \\ -2 = -3 + C_y \end{cases}$$

Y por tanto $C_x = -2$ y $C_y = 1$

Por tanto, los otros vértices son A(0,-3) y C(-2,1)



b) El área del rombo.

Para calcular el área necesitamos el valor de las dos diagonales: $A = \frac{D \cdot d}{2}$

Con los vectores

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (-8, -4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 1) - (0, -3) = (-2, 4)$$

Y sus módulos:

$$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ y } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Y el área:

$$A = \frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ u.c.}$$



4.- (0,4x5 puntos) Dada la recta $r: x + y - 3 = 0$ y el punto $P(-1, 2)$, se pide:

a) Hallar el punto simétrico de P respecto de r .

Calculamos la recta perpendicular que pasa por el punto P .

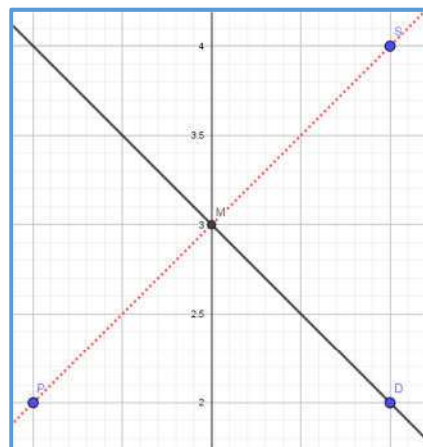
$$x - y + k = 0 \rightarrow -1 - 2 + k = 0 \rightarrow k = 3$$

$$x - y + 3 = 0$$

Y ahora el punto de corte entre ambas:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 3$$

Así que el punto $(0, 3)$ será el punto medio entre P y S .



$$M_{PS} = \left(\frac{P_x + S_x}{2}, \frac{P_y + S_y}{2} \right) \rightarrow (0, 3) = \left(\frac{-1 + S_x}{2}, \frac{2 + S_y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} 0 = -1 + S_x \\ 6 = 2 + S_y \end{cases}$$

Así que el punto simétrico es el $S(1, 4)$

b) Hallar la ecuación general de la recta s , paralela a r que pasa por P

Tomamos un haz de rectas paralelas a $r: x + y - 3 = 0$

$$\text{Haz: } x + y + k = 0 \rightarrow -1 + 2 + k = 0 \rightarrow k = -1$$

Por tanto, la recta pedida es: $x + y = 1$

c) Hallar la distancia entre la recta s y r .

$$\text{Como ambas son paralelas: } d(P, r) = d(P, s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

d) Hallar la posición relativa de r y la recta $t: 2x - y + 5 = 0$

Calculamos los vectores directores de ambas rectas y los observamos:

$$\vec{r} = (-1, 1) \quad \text{y} \quad \vec{t} = (1, 2)$$

Como sus vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

e) Hallar el ángulo entre r y s .

Para hallar el ángulo, utilizamos la definición de producto escalar, pero tomaremos el valor absoluto para asegurarnos de calcular el menor de los dos ángulos formados:



$$\vec{r} \cdot \vec{t} = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{t}\| \cdot \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Y conocido el coseno, calculamos en ángulo:

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = 71^\circ 33' 54,18''$$

5.- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (1,-2) y forme ángulos iguales con las rectas r: $r: 3x + 4y - 2 = 0$ y s: $s: 4x + 3y + 1 = 0$.

Calculamos la bisectriz de las rectas r y s:

$$\begin{aligned} d(P, r_1) = d(P, r_2) &\rightarrow \frac{|3x + 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x + 3y + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \rightarrow \frac{|3x + 4y - 2|}{5} = \frac{|4x + 3y + 1|}{5} \\ |3x + 4y - 2| &= |4x + 3y + 1| \rightarrow 3x + 4y - 2 = 4x + 3y + 1 \quad x - y + 3 = 0 \end{aligned}$$

Y ahora calculamos la recta paralela que pasa por (1,-2)

$$x - y + k = 0 \rightarrow 1 - (-2) + k = 0 \rightarrow k = -3 \quad x - y - 3 = 0$$

Ahora calculamos la perpendicular que pasa también por el (1,-2)

Un haz de rectas perpendiculares es:

$$x + y + k = 0 \rightarrow 1 - 2 + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow x + y + 1 = 0$$

Así que las rectas pedidas son: $x + y + 1 = 0$ y $x - y - 3 = 0$