



Solución examen 3

1.- (2 puntos) Resolver:

a) $2\operatorname{tg}x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}x = 1$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{tg}x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}x &= 1 & 2 \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{2} - \operatorname{sen}x &= 1 & \frac{\operatorname{sen}x(1+\cos x)}{\cos x} &= 1 + \operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}x(1+\cos x) - \cos x - \operatorname{sen}x \cdot \cos x &= 0 & \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x \cdot \cos x - \cos x - \operatorname{sen}x \cdot \cos x &= 0 \\ \operatorname{sen}x - \cos x &= 0 & \operatorname{sen}x &= \cos x & \operatorname{sen}x &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \operatorname{sen}^2 x &= 1 - \operatorname{sen}^2 x & 2\operatorname{sen}^2 x &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{4} \rightarrow \text{Verifican} & x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(4x)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x) &= 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \\ 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(2x) &= 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \\ 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot [\cos(2x) - 1] &= 0 \rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(4x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x = 0 + 2k\pi \\ 4x = \pi + 2k\pi \end{cases} \rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \\ \cos(2x) = 1 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 + 2k\pi \\ 2x = \pi + 2k\pi \end{cases} \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \end{aligned}$$

2.- (1 punto) Calcular todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) = 1 \end{cases} &\rightarrow y = \frac{\pi}{4} - x \rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \\ \sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}(x) \right] &= 1 \\ \sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(x) \right] &= 1 \rightarrow \cos^2 x + \operatorname{sen}x \cdot \cos x = 1 \\ \cos^2 x + \cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} &= 1 & \cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} &= 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x (1 - \cos^2 x) &= (1 - \cos^2 x)^2 \\ \cos^2 x (1 - \cos^2 x) - (1 - \cos^2 x)^2 &= 0 & (1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x - 1) &= 0 \\ \begin{cases} 1 - \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \rightarrow x = 0 + k\pi \\ 2\cos^2 x - 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases} \end{aligned}$$

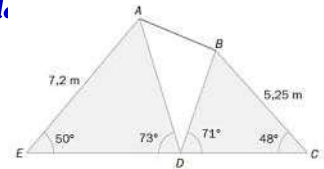
y de todas estas, solo funcionan:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + k\pi & x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi & y_2 = 0 + k\pi \end{cases}$$



3.- (2 puntos) Calcular la distancia entre los puntos A y B, y el área del triángulo ADB.

Si aplicamos el teorema del seno en el triángulo de la izquierda podemos calcular el segmento AD.



$$\frac{AD}{\sin(50^\circ)} = \frac{7,2}{\sin(73^\circ)} \rightarrow AD = \frac{7,2 \cdot \sin(50^\circ)}{\sin(73^\circ)} = 5,77m$$

Si hacemos lo mismo, pero para el triángulo de la izquierda, calculamos el segmento BD:

$$\frac{BD}{\sin(48^\circ)} = \frac{5,25}{\sin(71^\circ)} \rightarrow BD = \frac{5,25 \cdot \sin(48^\circ)}{\sin(71^\circ)} = 4,13m$$

Ahora, y aplicando el teorema del coseno en el triángulo ADB, podemos calcular el segmento AB, aunque antes calcularemos el ángulo ADB que es $180^\circ - (73^\circ + 71^\circ) = 36^\circ$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \cos(\angle ADB) \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \cos(\angle ADB)}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{5,77^2 + 4,13^2 - 2 \cdot 5,77 \cdot 4,13 \cdot \cos(36^\circ)} = \sqrt{11,79} = 3,43m$$

Para calcular el área del triángulo blanco, utilizaremos la fórmula de Herón:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3,43+5,77+4,13}{2} = 6,665 \quad \text{Area} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \quad \text{con} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Así que sustituyendo:

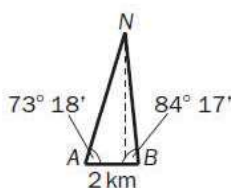
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3,43+5,77+4,13}{2} = 6,665m$$

$$\text{Area} = \sqrt{6,665 \cdot (6,665 - 3,43) \cdot (6,665 - 5,77) \cdot (6,665 - 4,13)} = 7 m^2$$

4.- (2 puntos) Dos físicos de la atmósfera, separados por una distancia de 2 Km, observan, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos respectivos de $73^\circ 18'$ y de $84^\circ 17'$. Calcular la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

El problema tiene dos interpretaciones.

En cada una de ellas utilizaremos el teorema del seno para resolver el triángulo:

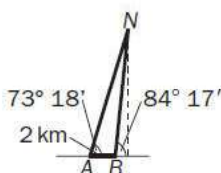


Si la nube está situada entre los dos observadores:

$$\frac{NB}{\sin 73^\circ 18'} = \frac{2}{\sin 22^\circ 25'} \Rightarrow NB \approx 5,02 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\sin 84^\circ 17'} = \frac{2}{\sin 22^\circ 25'} \Rightarrow NA \approx 5,22 \text{ km}$$

$$h = NB \cdot \sin 84^\circ 17' \approx 5 \text{ km}$$



Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores:

$$\frac{NB}{\sin 73^\circ 18'} = \frac{2}{\sin 10^\circ 59'} \Rightarrow NB \approx 10,05 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\sin 95^\circ 43'} = \frac{2}{\sin 10^\circ 59'} \Rightarrow NA \approx 10,45 \text{ km}$$

$$h = NB \cdot \sin 84^\circ 17' \approx 10 \text{ km}$$

5.- (1 punto) Demuestra la siguiente identidad trigonométrica, partiendo de la parte izquierda y llegando a la derecha:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$



$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} &= \frac{\overset{\text{desarrollamos el seno de la suma}}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}}{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha} \overset{\text{Si dividimos todo por } \cos\alpha \cdot \sin\beta}{=} \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} + \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}}{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} - \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}} \overset{\text{y simplificando...}}{=} \frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} + 1}{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} - 1} = \frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} + \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}}{\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}} \\ &= \frac{\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\beta}}{\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} \end{aligned}$$

6.- (1 punto) Sabiendo que $\sin(\alpha) = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

b) $\tan(1080^\circ - \alpha)$

a) $90^\circ - \alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante, por tanto, los ángulos son complementarios y por tanto:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - h^2}$$

b) $1080^\circ - \alpha = 3 \cdot 360^\circ - \alpha = 3 \cdot 0^\circ - \alpha = -\alpha$, por tanto:

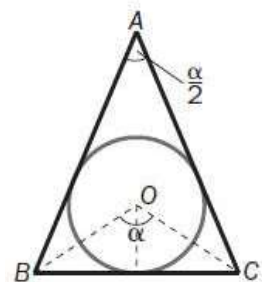
$$\tan(1080^\circ - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} = -\frac{h\sqrt{1 - h^2}}{1 - h^2}$$

7.- (1 punto) El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo, sabiendo que su base mide 60 cm.

De tercero de la eso, debemos de acordarnos de que cuando un ángulo inscrito y un ángulo del centro de una circunferencia abarcan el mismo arco, el ángulo inscrito vale la mitad que el ángulo del centro.

Por tanto, si lo representamos con el siguiente dibujo, en el que hemos representado los ángulos central e inscrito, podemos calcular mediante Pitágoras el lado OB.

$$OB = \sqrt{R^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{18^2 + 30^2} = 35 \text{ cm}$$



El triángulo OBC tiene por lados 35, 35 y 60 cm. Por tanto, si aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \cos(\alpha)$$

Y despejamos el coseno, podremos calcular el ángulo α :

$$\overline{BC}^2 - \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = -2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}{-2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC}} = -\frac{60^2 - 35^2 - 35^2}{2 \cdot 35 \cdot 35} = -0,469$$

Así que el ángulo α será: $\alpha = \arccos(-0,469) = 118^\circ$ y por tanto el ángulo A del triángulo será la mitad:

$$A = \frac{\alpha}{2} = 59^\circ$$

y por tanto: $180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$ será la medida de los otros dos ángulos.

Al ser Isósceles, ambos ángulos serán iguales: $B = C = \frac{121^\circ}{2} = 60^\circ 30'$

Y por último, mediante el teorema del seno, calculamos los lados $AB = AC = \frac{BC \cdot \sin(60,5)}{\sin(59)} = 60,92 \text{ m}$