



1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} + 5 = 0$

b) $x^{1+\log x} = 10x$

c)
$$\frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x^2-4x}{x+1}}{\frac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x} : \frac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}} = x$$

Sol: a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{57}{64} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{1}{10} \end{cases}$ c) $x = 1$

2.- El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe total de 3.000 euros (sin impuestos), siendo el valor de los refrescos igual al valor conjunto de la cerveza y el vino. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 3.260 euros. Halla el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran el 6%, el 10% y el 14%, respectivamente. (Usa el método de Gauss).

Si llamamos x al dinero de los refrescos, y al de la cerveza y z al del vino, y escribimos la relación entre las variables, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3000 \\ x - y - z = 0 \\ 1,06x + 1,1y + 1,14z = 3260 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1,06x + 1,1y + 1,14z = 3260 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = 3000 \end{cases} \xrightarrow{1,1f_2 - f_1} \begin{cases} 1,06x + 1,1y + 1,14z = 3260 \\ 0,04x - 0,04z = 40 \\ 2x = 3000 \end{cases}$$

Que si resolvemos nos da: 500€ en vino, 1.000€ en cerveza y 1.500 € en refrescos.

3.- Los ratones han roído parte de una pieza triangular de cartón que un sastre había cortado para confeccionar un patrón. Calcular las longitudes de sus lados a partir a partir de lo que quedaba de ella. ¿Cuál es su área?

Si utilizamos 2 veces el teorema del seno, podemos calcular los lados a y b desconocidos.

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin 50} &= \frac{120}{\sin 45} \rightarrow a = \frac{120 \cdot \sin 50}{\sin 45} = 130 \text{ cm} \\ \frac{b}{\sin 85} &= \frac{120}{\sin 45} \rightarrow b = \frac{120 \cdot \sin 85}{\sin 45} = 169 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \text{ Por tanto el semiperímetro } S = \frac{419}{2} \text{ cm} \rightarrow A = 7769,88 \text{ cm}^2$$

En donde para calcular el área hemos utilizado la fórmula de Herón.

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2x - \sin 2x = 0$

b) $\sin(x + 30) + \cos(x + 60) = 1 + \cos 2x$

a) Si $\cos 2x - \sin 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = \sin 2x \rightarrow \begin{cases} 2x = 45^\circ + 360k \rightarrow x_1 = 22,5^\circ + 180k \\ 2x = 225 + 360k \rightarrow x_2 = 112,5^\circ + 180k \end{cases}$

b) Si desarrollamos el seno y el coseno de la suma, tenemos:

$$\sin(x + 30) + \cos(x + 60) = 1 + \cos 2x \rightarrow \sin x \cdot \cos 30 + \cos x \cdot \sin 30 + \cos x \cdot \cos 60 - \sin x \cdot \sin 60 = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x$$

Operando un poco:



$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2} - \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2} = 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \cos x = 2 \cos^2 x$$

Si agrupamos y sacamos factor común:

$$\cos x - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x (1 - 2 \cos x) = 0$$

Llegamos a:

$$\cos x = 0 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$1 - 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

5.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 y = \cos^2 y$$

Si sustituimos en la segunda ecuación:

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

De igual forma:

$$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 y \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 30 = \cos^2 y \rightarrow \cos y = \pm \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}^2 150 = \cos^2 y \rightarrow \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ y_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ y_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ y_4 = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Que si comprobamos observamos que funcionan todas.

6.- Calcula, usando la fórmula del binomio de Newton, esta potencia $(2 - 2\sqrt{3}i)^5$ y hazlo en forma binómica. Además, comprueba el resultado, expresando el número complejo en forma polar y realizando la misma operación.

Sabemos que mediante el binomio de Newton:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Por tanto:

$$(2 - 2\sqrt{3}i)^5 = 2^5 + 5 \cdot 2^4 \cdot (-2\sqrt{3}i) + 10 \cdot 2^3 \cdot (-2\sqrt{3}i)^2 + 10 \cdot 2^2 \cdot (-2\sqrt{3}i)^3 + 5 \cdot 2 \cdot (-2\sqrt{3}i)^4 + (-2\sqrt{3}i)^5$$

Y operando un poco, llegamos a:

$$(2 - 2\sqrt{3}i)^5 = 32 - 160\sqrt{3}i - 960 + 960\sqrt{3}i + 1440 - 288\sqrt{3}i = 512 + 512\sqrt{3}i = 512(1 + \sqrt{3}i)$$



expresamos el número complejo en forma polar:
$$\begin{cases} \|z\| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \rightarrow \arg(z) = -60 = 300^\circ \end{cases}$$

Por tanto:

$$z^5 = (4_{300^\circ})^5 = 1024_{1500^\circ} = 1024_{60^\circ}$$

Si escribimos $512 + 512\sqrt{3}i$ en forma polar obtenemos:
$$\begin{cases} \|z\| = \sqrt{512^2 + (512\sqrt{3})^2} = \sqrt{1048576} = 1024 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{512\sqrt{3}}{512} = \sqrt{3} \rightarrow \arg(z) = 60 \end{cases}$$

Y observamos que ambos resultados coinciden: $512 + 512\sqrt{3}i = 1024_{60^\circ}$

7.- Calcula el valor de b , para que el cociente de $-9 + bi$ entre $1 - 2i$ tenga módulo $5\sqrt{2}$

Realizamos la división, y obtenemos:
$$\frac{-9 + bi}{1 - 2i} = \frac{-9 + bi}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{-9 - 2b}{5} + \frac{b - 18}{5}i$$

Su módulo será:
$$\sqrt{\left(\frac{-9 - 2b}{5}\right)^2 + \left(\frac{b - 18}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2 + 36b + 81}{25} + \frac{b^2 - 36b + 324}{25}} = \sqrt{\frac{5b^2 + 405}{25}} = \frac{\sqrt{5b^2 + 405}}{5}$$

Como el módulo ha de ser $5\sqrt{2}$, igualamos ambos módulos y calculamos b :

$$\frac{\sqrt{5b^2 + 405}}{5} = 5\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{5b^2 + 405} = 25\sqrt{2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(\sqrt{5b^2 + 405})^2 = (25\sqrt{2})^2 \rightarrow 5b^2 + 405 = 1250 \rightarrow 5b^2 = 845 \rightarrow b^2 = 169 \rightarrow b = \pm 13$$

Comprobamos y observamos que ambas soluciones son posibles. Por tanto, $b = \pm 13$