

Solución examen extraordinario

Bloque Aritmética y Álgebra

1.- Halla la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo de 480 m^2 de área sabiendo que la hipotenusa mide 52 m .

Sol: Un lado mide 48 metros y el otro 20 metros.

2.- Una pastelería vendió 27 tartas. El número de las de chocolate duplicó al de tartas de nata y entre ambas excedieron en 3 a las ventas de tartas de queso. ¿Cuántas se vendieron de cada tipo?

$x = \text{n.º de tartas de chocolate}$

$y = \text{n.º de tartas de nata}$

$z = \text{n.º de tartas de queso}$

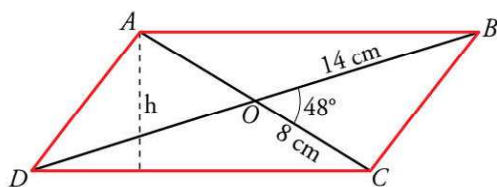
Expresamos las condiciones mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 27 \\ x = 2y \\ x + y = z + 3 \end{cases} \rightarrow x = 10, y = 5, z = 12$$

Vendió 10 tartas de chocolate, 5 tartas de nata y 12 tartas de queso.

Bloque Trigonometría y Complejos

3.- Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48° . Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.



Utilizamos el teorema del coseno en los triángulos BOC y AOB .

$$\overline{BC}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cos 48^\circ \rightarrow \overline{BC} = 10,49 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cos (180^\circ - 48^\circ) \rightarrow \overline{AB} = 20,25 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = (10,49 + 20,25) \cdot 2 = 61,48 \text{ cm}$$

Para hallar el área, necesitamos conocer un ángulo del paralelogramo.

Hallamos el ángulo $\hat{A}$ del triángulo AOB .

$$\frac{14}{\sin \widehat{BAO}} = \frac{20,25}{\sin 132^\circ} \rightarrow \sin \widehat{BAO} = \frac{14 \cdot \sin 132^\circ}{20,25} \rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ 54' 57''$$

En el triángulo ACD , hallamos la altura.

$$\widehat{BAO} = \widehat{ACD} \rightarrow \sin 30^\circ 54' 57'' = \frac{h}{16} \rightarrow h = 8,22 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{20,25 \cdot 8,22}{2} = 83,23 \text{ cm}^2$$

4.- Demuestra la siguiente identidad: $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$

$$\text{a) } \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

5.- Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $2 \cdot \sin x + \cos x = 1$

$$2\operatorname{sen} x + \cos x = 1 \rightarrow (2\operatorname{sen} x)^2 = (1 - \cos x)^2 \rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x - 2\cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow 5\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -3/5 \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Vale.}$$

$$\cos x = -\frac{3}{5} \begin{cases} x_2 = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Vale.} \\ x_3 = 233^\circ 7' 48'' \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Hemos comprobado las soluciones en la ecuación dada.

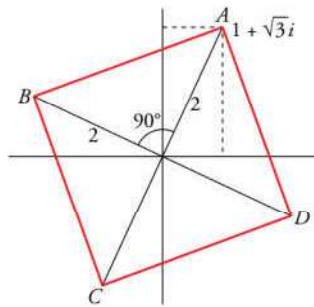
6.- Simplifica: $\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$

$$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1; i^7 = i^4 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

$$i^{33} = (i^4)^8 \cdot i = i$$

$$\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \frac{-1 - 2(-i)}{2 + i} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-2 + i + 4i - 2i^2}{(2)^2 - (i)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

7.- Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.



Hacemos giros de 90° . Para ello, multiplicamos por i_{90° :

$$A = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$$

$$B = 2_{60^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 2_{150^\circ}$$

$$C = 2_{150^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 2_{240^\circ}$$

$$D = 2_{240^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 2_{330^\circ}$$

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2}$$

Bloque Geometría y Cónicas

8.- Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 2)$

a) Calcula $\operatorname{proy}_{\vec{u}} \vec{v}$

b) Calcula en ángulo que forman.

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w} = (4, 6)$ en la base $B(\vec{u}, \vec{v})$

$$a) \operatorname{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$b) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116^\circ 33' 54''$$

$$c) \vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v} \rightarrow (4, 6) = k(-1, 0) + s(1, 2) = (-k + s, 2s) \rightarrow \begin{cases} -k + s = 4 \\ 2s = 6 \end{cases} \rightarrow s = 3, k = -1$$

$$\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$$

9.- Sean las rectas r y s :

$$r: y = x + 2$$

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \end{cases}$$

a) Halla la distancia que las separa.

b) Calcula el ángulo que forman.

Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (1, 1)$, $\vec{d}_s = (1, 1)$, luego son paralelas.

Sea $P \in s$, por ejemplo, $P = (0, -2)$.

$$r: y = x + 2 \rightarrow x - y + 2 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, r) = \left| \frac{-(-2) + 2}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}$$

10.- Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la cónica de ecuación $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ y la recta $r: 3x - 4y - 1 = 0$.

Calculamos la distancia de la recta al centro de la circunferencia, $C(1, -2)$:

$$\text{dist}(r, C) = \frac{3 \cdot 1 - 4(-2) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Esta distancia coincide con el radio de la circunferencia. Por tanto, son tangentes.

Bloque Análisis de funciones

11.- Considera la función $f(x) = x \ln \frac{x}{a}$, con $a > 0$. Determina el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 1$?

Para que la función f tenga un mínimo relativo en $x = 1$, tiene que ocurrir que $f'(1) = 0$

Derivamos la función f :

$$f(x) = x \ln \frac{x}{a} \rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln \frac{x}{a} + x \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{a} = \ln \frac{x}{a} + 1$$

Calculamos la derivada en $x = 1$, e igualamos a cero:

$$f'(x) = \ln \frac{x}{a} + 1 \rightarrow f'(1) = \ln \frac{1}{a} + 1 = 1 - \ln a \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow \ln \frac{1}{a} + 1 = 0$$

Despejamos a :

$$\ln \frac{1}{a} + 1 = 0 \leftrightarrow \ln \frac{1}{a} = -1 \leftrightarrow \ln 1 - \ln a = -1 \leftrightarrow -\ln a = -1 \leftrightarrow \ln a = 1 \leftrightarrow a = e$$

Por tanto, para que la función f tenga un mínimo en $x = 1$, a debe ser $a = e$.

La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ y en el punto $x = 1$: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$\text{Como: } \begin{cases} f(1) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = 1 - 1 = 0 \\ f'(1) = e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - f(1) = f'(1)(x - 1) \\ y = e(x - 1) \end{cases}$$

Por tanto, la recta tangente en $x = 1$ es: $y = e(x - 1)$

12.- Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- Determinar los coeficientes a , b y c sabiendo que tiene extremos relativos en $x = -1$ y $x = +1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.
- Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

a) Como $P(x)$ tiene extremos relativos en ± 1 : $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

Calculamos $P'(x)$: $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y si sustituimos lo anterior, obtenemos:

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 & \rightarrow 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 + 2b = 0 \\ b = -3 \\ a = 0 \end{cases}$$

Como nos dicen que pasa por el origen O, entonces: $P(0) = 0 \rightarrow P(0) = 0^3 + a0^2 + b0 + c = 0 \rightarrow c = 0$

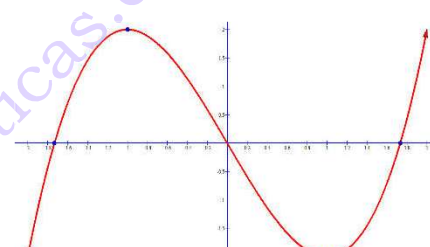
Por tanto, el polinomio buscado es: $P(x) = x^3 - 3x$

b) Utilizando la segunda derivada podemos distinguir si son máximo o mínimo: $P''(x) = 6x + 2a = 6x$

- En $x = -1$, $P''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ **Mínimo en $x = -1$**
- En $x = 1$, $P''(1) = 6(1) = 6 > 0 \rightarrow$ **Máximo en $x = 1$**

Calculamos la "altura" de los extremos: $\begin{cases} P(-1) = -1 + 3 = 2 \rightarrow \text{Min}(-1, 2) \\ P(1) = 1 - 3 = -2 \rightarrow \text{Max}(1, -2) \end{cases}$

Calculamos los puntos de corte con el eje x:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$


Y vemos su comportamiento en los infinitos: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 3x = \pm\infty$

Por tanto el boceto será el representado a la derecha.

13.- Calcula el dominio y las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$

En la función $f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$: $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \rightarrow \text{Dom}(f) = [0, 2) \cup (2, +\infty)$

Sabemos que una función f presenta una A.V. en un punto x_0 si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Calculamos el límite en $x=2$:

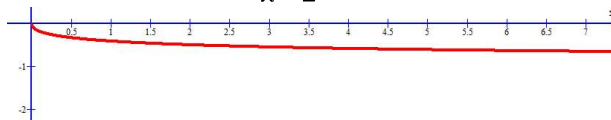
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x} - x)(\sqrt{2x} + x)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{(x - 2)(\sqrt{2x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(\sqrt{2x} + x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sqrt{2x} + x} = \frac{2}{2 + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, no hay asíntota vertical.

También sabemos que una función f presenta una asíntota horizontal en la dirección $y=k$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \quad \forall \in \mathbb{R}$$

Calculamos el límite en el infinito: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} = -1 \rightarrow$ **A. Horizontal en la dirección $y=-1$**



5.- Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) &= \infty - \infty \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)} \right) = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln(x) + \frac{x-1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\cancel{1-x}}{x \cdot \ln(x) + \cancel{(x-1)}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{x \cdot \ln(x) + (x-1)} \right) = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{\ln(x) + 1 + 1} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donde hemos aplicado la regla de L'Hopital que dice:

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones f y g son derivables en un entorno E del punto a .
- ✓ $f(a) = g(a) = 0$
- ✓ Existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$