



Solución Examen Final de la 3ª Evaluación de 1º Bcto.

1.- Sea la función f definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ (2 puntos)

- a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f .
- b) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

a) El dominio de la función es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, por tanto vamos a empezar estudiando las asíntotas verticales:

La función f , presenta una asíntota vertical en un punto x_0 , si ocurre: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty \end{cases} \text{ Por tanto } f \text{ tiene una Asíntota Vertical en } x=1.$$

Estudiamos ahora la asíntota horizontal: Una función presenta una asíntota horizontal en $y=k$, si ocurre: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \rightarrow$ Asíntota Horizontal $y=0$ cuando $x \rightarrow +\infty$

Y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = +\infty \rightarrow$ Estudiamos en este caso: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y

obtenemos: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x(1-x)} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1-2x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-2} = +\infty \rightarrow$ Por tanto la función presenta una rama parabólica cuando $x \rightarrow -\infty$

b) Para la monotonía, utilizamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Por tanto, si utilizamos la tabla, tenemos:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\nearrow

Mín (0,1)

Así que f es creciente en: $(0,1) \cup (1,+\infty)$, f es decreciente en $(-\infty,0)$ y además, la función presenta un mínimo en el punto (0,1)

2.- Sea f la función definida por $f(x) = 4 - x^2$ (2 puntos)

- Halla las ecuaciones de la recta normal y de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
- Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $r : x + 2y - 2 = 0$

a) Las ecuaciones de la recta normal y de la recta tangente a una gráfica en un punto a , vienen dadas por:

Recta Tangente

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Recta Normal

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

Por tanto, como: $f(2)=0$; $f'(x)=-2x$; $f'(2)=-4$, tenemos:

$$y - 0 = -4 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y = 8 - 4x \quad \quad y - 0 = \frac{1}{4} \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad x - 4y - 2 = 0$$

- b) En el punto de la gráfica en el que la recta tg es perpendicular a la recta dada, como la pendiente de la tangente es: $m = -1/2$, la pendiente de la perpendicular será:
 $m_{\perp} = 2$

Por tanto, la derivada en dicho punto ha de ser -2 , derivamos la función:

$$f'(x) = -2x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2 \quad \rightarrow \quad -2x = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Así que calculamos $f(-1)$ y ya tenemos el punto pedido: $(-1,3)$

3.- Sea f la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula los valores de a , b , c y d sabiendo que f verifica: (2 puntos)

- ✓ El punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f .
- ✓ f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$.
- ✓ La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1.

Si el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión, tenemos que: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$

Si tiene un mínimo en $x=1$, tenemos que: $f'(1) = 0$

Y si la recta tangente en $x=2$ tiene pendiente 1, tenemos: $f'(2) = 1$

Agrupando todas estas ecuaciones, nos dará un sistema, cuyas soluciones a , b , c y d son los coeficientes de $f(x)$.

$$f(0) = 1 \quad \rightarrow \quad d = 1$$

$$f''(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$$

$$f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \quad \rightarrow \quad 3a + c = 0$$

$$f'(2) = 0 \quad \rightarrow \quad 12a + 4b + c = 1 \quad \rightarrow \quad 12a + c = 1$$

Resolviendo:





Solución Examen Final de la 3ª Evaluación de 1º Bcto.

$$a = \frac{1}{9} \quad b = 0 \quad c = -\frac{1}{3} \quad d = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x + 1 = 0$$

4.- Calcule las derivadas siguientes: (1 punto)

$$a) f(x) = e^{3x} \cdot \ln(2x - 5) \quad b) g(x) = \frac{3^{2x}}{x^2 - 1} \quad c) h(x) = (3x^2 + 5x - 1)^6 + x^2 - \ln x$$

$$a) f'(x) = 3 \cdot e^{3x} \cdot \ln(2x - 5) + e^{3x} \cdot \frac{2}{2x - 5}$$

$$g'(x) = \frac{2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3(x^2 - 1) - 2x \cdot 3^{2x}}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h'(x) = 6 \cdot (3x^2 + 5x - 1)^5 \cdot (6x + 5) + 2x - \frac{1}{x}$$

5.- Determina a y b para que el siguiente límite exista y sea finito. Además calcúlalo. (1p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + ax + bx^2}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + ax + bx^2}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} + a + 2bx}{3 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}$$

Para que podamos volver a utilizar la regla de L'Hopital, tiene que ocurrir que $1+a=0$, por tanto a debe de ser $a=-1$.

Y ya estamos en condiciones de volver a aplicar L'Hopital:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + 2bx}{3 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + 2bx}{6 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 2b}{6 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^3 x}$$

De igual manera, para que sea finito, $2b \neq 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$

Así que de esta forma volvemos a estar en condiciones de aplicar L'Hopital:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 1}{6 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^3 x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6 \cdot \cos^3 x - 21 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6.- Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ (2 puntos)

1.- Dominio:

La función es un cociente de polinomios, por tanto su dominio es el conjunto de los números reales, menos los valores que anulen el denominador.

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

2.- Simetrías:

Para ver si una función es par o impar, calculamos $f(-x)$ y vemos que ocurre:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)+2} = \frac{x^2}{-x+2} \rightarrow \text{Por tanto la función no es impar, ni par.} \rightarrow \text{No es Simétrica.}$$

3.- Periodicidad:

La función $f(x)$ no es periódica, porque no es composición de funciones trigonométricas.

4.- Puntos de discontinuidad:

Como $f(x)$ es un cociente de polinomios, y los polinomios son siempre funciones continuas, $f(x)$ es una función continua excepto donde se anule el denominador. $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \end{cases}$

Por tanto, f es continua en todos los puntos de su dominio y en $x=-2$, la función $f(x)$ presenta una discontinuidad asintótica.

5.- Puntos de corte con los ejes.

Los puntos de corte con los ejes se calculan haciendo $f(0)$ e igualando $f(x)=0$ y resolviendo la ecuación, por tanto:

$$\text{Hacemos } f(x) = \frac{x^2}{x+2} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Calculamos } f(0) = 0$$

Por tanto el punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)

6.- Asíntotas:

Como hemos visto ya, en el apartado de continuidad, $f(x)$ presenta en $x=-2$ una asíntota vertical.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, no presenta asíntotas horizontales, pero si puede presentar alguna asíntota oblicua o rama ya sea hiperbólica o parabólica.

$$\text{Calculamos } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x} = 1$$

$$\text{Como es finito, ahora calculamos } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2}{x+2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} \right] = -2$$



Solución Examen Final de la 3ª Evaluación de 1º Bcto.

Por tanto $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $y=x-2$



7.- Monotonía y curvatura:

Para ello, lo primero es calcular la derivada de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \text{ y la igualamos a cero para calcular los extremos relativos:}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Estudiamos ahora el signo de $f'(x)$ para ver los intervalos de monotonía.

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, los puntos que hacen la función cero, y los puntos donde no es continua.

X	$(-\infty, -4)$		$(-4, -2)$		$(-2, 0)$		$(0, +\infty)$	
$f'(x)$	+		-		-		+	
$f(x)$	\nearrow		\searrow		\searrow		\nearrow	
	Max $(-4, -8)$				Min $(0, 0)$			

$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-4, -2) \cup (-2, 0)$

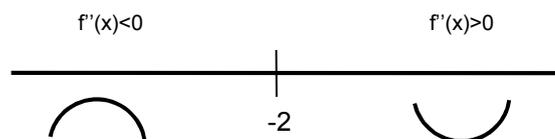
$f(x)$ tiene un máximo en $x = -4$ $f(-4) = -8$ en el punto $(-4, -8)$

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$ $f(0) = 0$ en el punto $(0, 0)$

Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión, donde la curva cambia de cóncava a convexa. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}, \text{ esta segunda derivada siempre es distinta de cero, luego no hay punto de inflexión}$$

Veamos ahora la curvatura de la función:



Por tanto, la función es cóncava en $(-\infty, -2)$ y es convexa en $(-2, +\infty)$

8.- Gráfica de la función:

Con todos los datos que ya tenemos de $f(x)$, lo único que nos falta es representarla.

