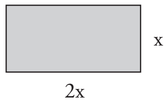
10 Funciones. Rectas y parábolas

1. Funciones

PIENSA Y CALCULA

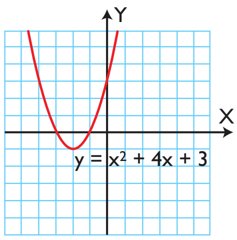
Dado el rectángulo de la figura, calcula:
a) el perímetro.
b) el área.

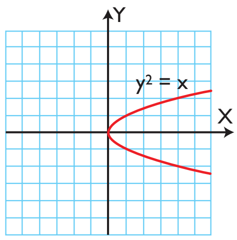


Solución:
Perímetro = $2(2x + x) = 6x$
Área = $2x \cdot x = 2x^2$

APLICA LA TEORÍA

1 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)


b)


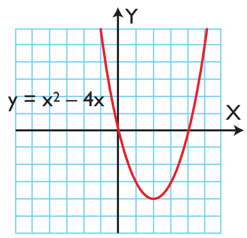
Solución:
a) Sí es función.
b) No es función. Hay valores de **x** para los que existen dos valores de **y.** Por ejemplo, para $x = 4$, $y = -2$, $y = 2$

2 Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 1$ b) $y = \log(x + 1)$
c) $y = \sqrt{x + 2}$ d) $y = \cos 2x$
e) $y = \dfrac{2}{x - 3}$ f) $y = 2^{x + 1}$

Solución:
a) Polinómica
b) Logarítmica.
c) Irracional.
d) Trigonométrica.
e) Racional.
f) Exponencial.

3 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen O(0, 0)

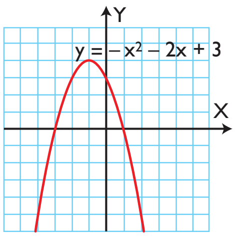
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(4, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: B(2, – 4)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

4 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(– 3, 0), B(1, 0)
   - Eje Y: C(0, 3)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: D(– 1, 4)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1)$
   - Decreciente (↘): $(-1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

2. Función lineal y función afín

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = 2x$, indica si es lineal o afín y calcula la pendiente.

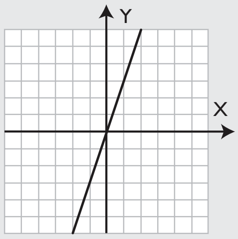
Solución:
Función lineal.
Pendiente: $m = 2$

5 Dadas las funciones lineales siguientes, halla su pendiente e indica si son crecientes o decrecientes. Represéntalas:

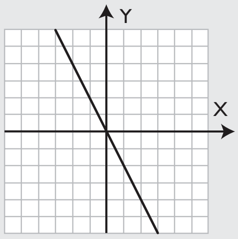
a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x/3$

Solución:

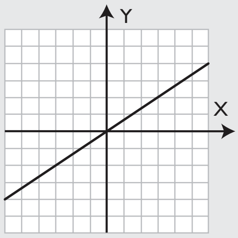
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.



b) $m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.

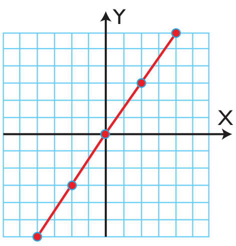


c) $m = 2/3 \Rightarrow$ Creciente.

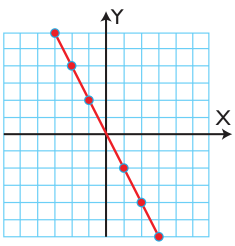


6 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

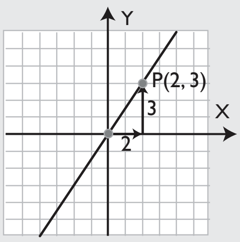


b)



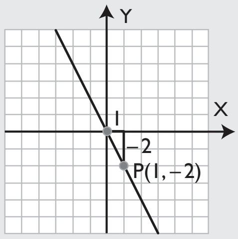
Solución:

a)



$m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

b)



$m = -2 \Rightarrow y = -2x$

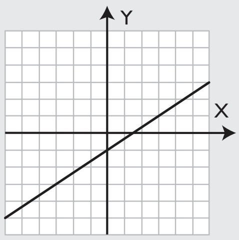
7 Dadas las funciones afines siguientes, halla su pendiente y la ordenada en el origen, e indica si son crecientes o decrecientes. Represéntalas:

a) $y = 2x/3 - 1$ b) $y = -3x/4 + 2$

Solución:

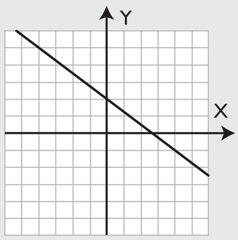
a) $m = 2/3 \Rightarrow$ Creciente.

$b = -1$



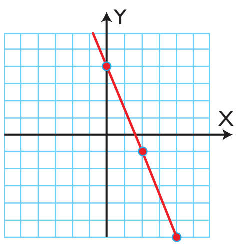
b) $m = -3/4 \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 2$

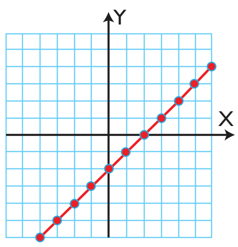


8 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

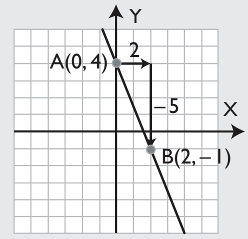


b)



Solución:

a)

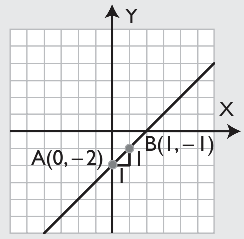


$$m = \frac{-1-4}{2-0} = -\frac{5}{2}$$

$b = 4$

$$y = -\frac{5}{2}x + 4$$

b)



$$m = \frac{-1-(-2)}{1-0} = 1$$

$b = -2$

$y = x - 2$

3. Función cuadrática

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 4$, representada en el margen, indica:

a) la ecuación del eje de simetría.

b) las coordenadas del vértice, y si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:

a) $x = 0$

b) $V(0, -4)$ es un mínimo.

APLICA LA TEORÍA

9 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 6x - 1$ b) $y = -2x^2 + 8x - 5$

c) $y = x^2 - 9$ d) $y = x^2 + 2x$

Solución:

a) Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -4)$ es un mínimo.

b) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, 3)$ es un máximo.

c) Eje de simetría: $x = 0$

$V(0, -9)$ es un mínimo.

d) Eje de simetría: $x = -1$

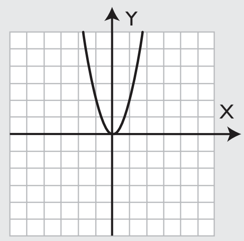
$V(-1, -1)$ es un mínimo.

10 Representa las siguientes parábolas:

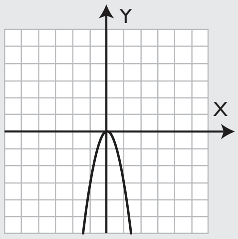
a) $y = 2x^2$ b) $y = -3x^2$

Solución:

a)

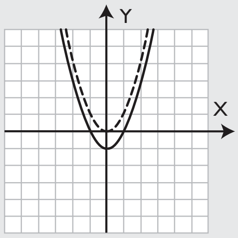


b)



11 Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = x^2 - 1$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:

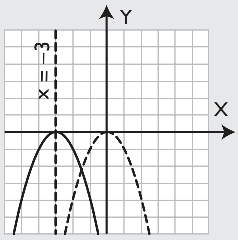


Eje de simetría: $x = 0$

$V(0, -1)$ es un mínimo.

12 Representa la parábola $y = -x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = -(x + 3)^2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:

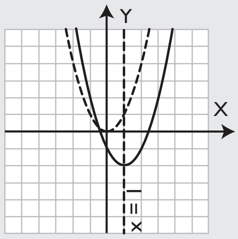


Eje de simetría: $x = -3$

$V(-3, 0)$ es un máximo.

13 Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = (x - 1)^2 - 2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un mínimo.

4. La parábola

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$, representada en el margen, indica:

a) la ecuación del eje de simetría.

b) las coordenadas del vértice y si éste es máximo o mínimo.

Solución:

Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un mínimo.

14 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, indicando si éste es un máximo o un mínimo, de las siguientes funciones cuadráticas, y represéntalas:

a) $y = x^2 - 4x - 1$

b) $y = -3x^2 - 6x + 2$

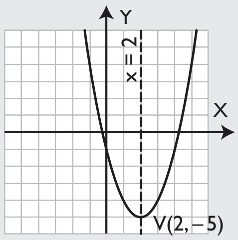
c) $y = x^2 + 4x + 3$

d) $y = -2x^2 + 8x - 5$

Solución:

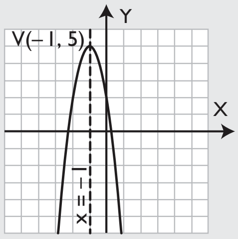
a) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -5)$ es un mínimo.



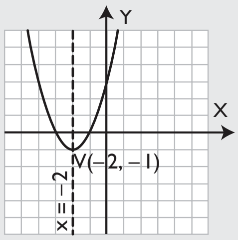
b) Eje de simetría: $x = -1$

$V(-1, 5)$ es un máximo.



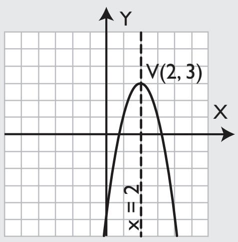
c) Eje de simetría: $x = -2$

$V(-2, -1)$ es un mínimo.

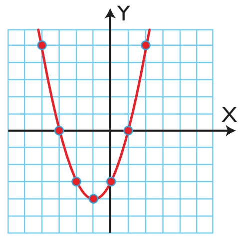


d) Eje de simetría: $x = 2$

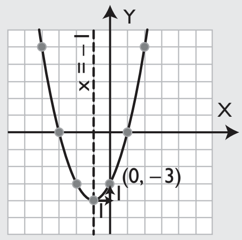
$V(2, 3)$ Es un máximo.



15 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = 1$

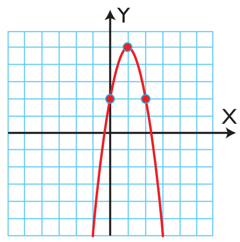
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 2$

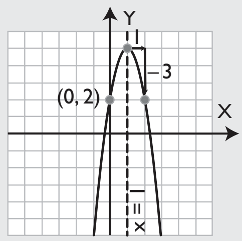
$c = -3$

$y = x^2 + 2x - 3$

16 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = -3$

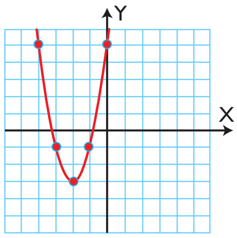
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

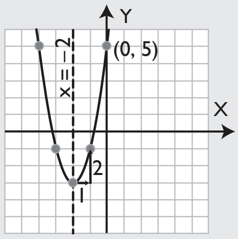
$c = 2$

$y = -3x^2 + 6x + 2$

17 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = 2$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

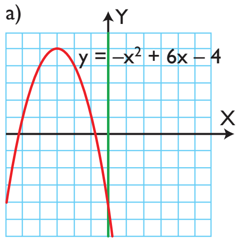
$c = 5$

$y = 2x^2 + 8x + 5$

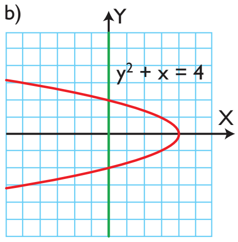
1. Funciones

18 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)



b)



Solución:

a) Sí es función.

b) No es función. Hay valores de **x** para los que existen dos valores de **y.** Por ejemplo, para $x = 0$, $y = -2, y = 2$

19 Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - x + 2$ b) $y = \log(x - 3)$

c) $y = \sqrt{x - 5}$ d) $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$

e) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$ f) $y = 3^{x-2}$

Solución:

a) Polinómica.

b) Logarítmica.

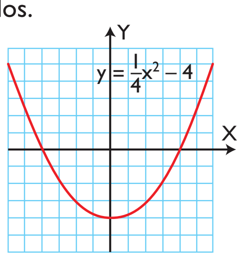
c) Irracional.

d) Trigonométrica.

e) Racional.

f) Exponencial.

20 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

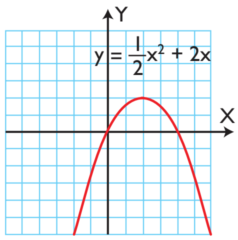
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-4, 0), B(4, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

21 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(4, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(2, 2)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 2)$
   - Decreciente (↘): $(2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 2]$

2. Función lineal y función afín

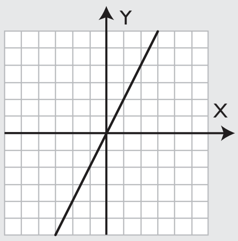
22 Halla mentalmente la pendiente de las siguientes funciones lineales o de proporcionalidad directa, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = 2x$ b) $y = -\dfrac{x}{2}$

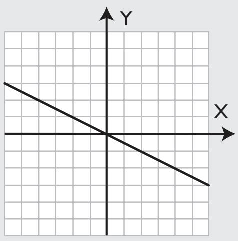
c) $y = \dfrac{4x}{3}$ d) $y = -\dfrac{5x}{4}$

Solución:

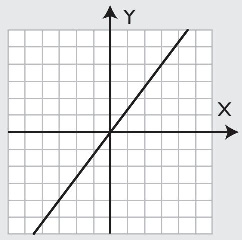
a) $m = 2 \Rightarrow$ Creciente.



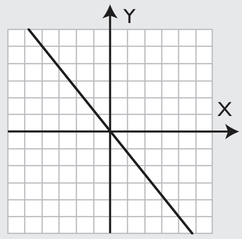
b) $m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.



c) $m = 4/3 \Rightarrow$ Creciente.

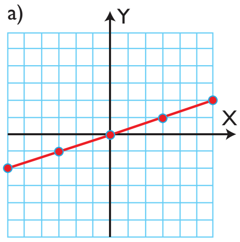


d) $m = -5/4 \Rightarrow$ Decreciente.

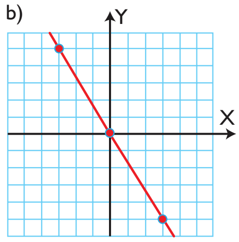


23 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

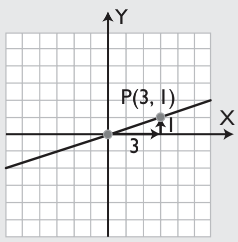


b)



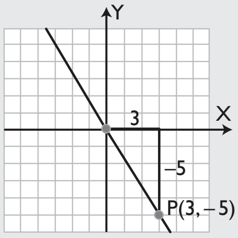
Solución:

a)



$m = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x$

b)



$$m = \frac{-5}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x$$

24 Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

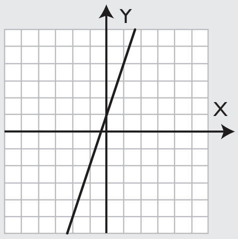
a) $y = 3x + 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 3$

c) $y = \frac{3x}{2} - 1$ d) $y = -\frac{4x}{3} + 2$

Solución:

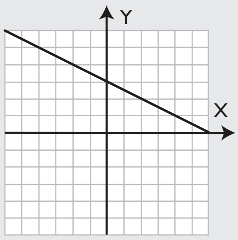
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.

$b = 1$



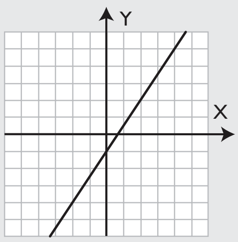
b) $m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 3$



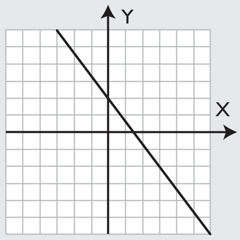
c) $m = 3/2 \Rightarrow$ Creciente.

$b = -1$



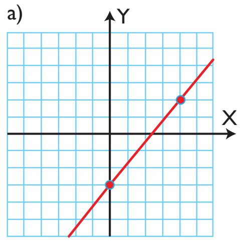
d) $m = -4/3 \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 2$

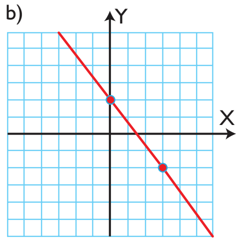


25 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

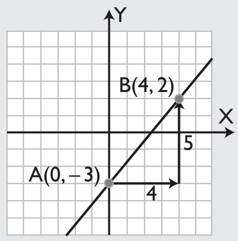


b)



Solución:

a)

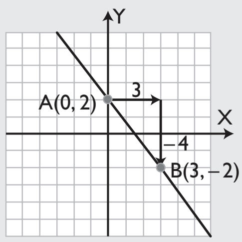


$$m = \frac{2-(-3)}{4-0} = \frac{5}{4}$$

$b = -3$

$$y = \frac{5}{4}x - 3$$

b)



$$m = \frac{-2-2}{3-0} = -\frac{4}{3}$$

$b = 2$

$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$

3. Función cuadrática

26 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 4x^2 - 16x + 11$

b) $y = -x^2 + 2x - 3$

c) $y = x^2 + 2$

d) $y = x^2 + 4x$

Solución:

a) Eje de simetría: $x = 2$
$V(2, -5)$ es un mínimo.

b) Eje de simetría: $x = 1$
$V(1, -2)$ es un máximo.

c) Eje de simetría: $x = 0$
$V(0, 2)$ es un mínimo.

d) Eje de simetría: $x = -2$
$V(-2, -4)$ es un mínimo.

27 Representa la siguiente parábola:

$$y = \frac{x^2}{2}$$

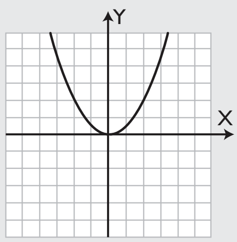
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 0$

b) $V(0, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(0, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

d) Es convexa (∪)

28 Representa la siguiente parábola:

$$y = -\frac{x^2}{3}$$

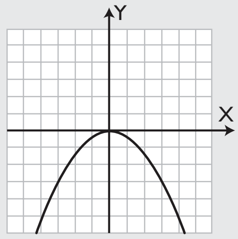
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 0$

b) $V(0, 0)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

29 Representa la parábola $y = -x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$y = -x^2 + 2$

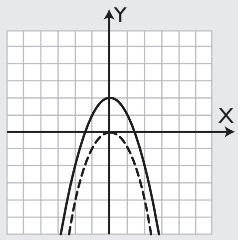
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 0$

b) $V(0, 2)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

30 Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$y = (x - 2)^2$

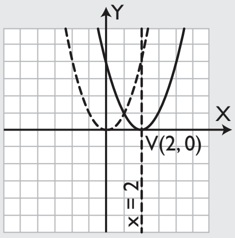
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 2$

b) $V(2, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$

d) Es convexa (∪)

31 Represente la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$y = (x + 2)^2 - 3$

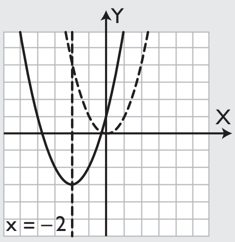
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = -2$

b) $V(-2, -3)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(-2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -2)$

d) Es convexa (∪)

4. La parábola

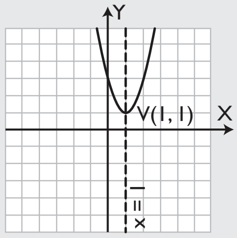
32 Representa la siguiente parábola:

$y = 2x^2 - 4x + 3$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



a) $x = 1$

b) $V(1, 1)$ es un mínimo.

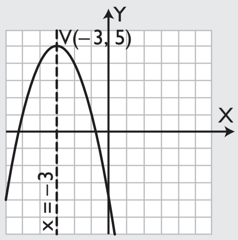
33 Representa la siguiente parábola:

$y = -x^2 - 6x - 4$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



a) $x = -3$

b) $V(-3, 5)$ es un máximo.

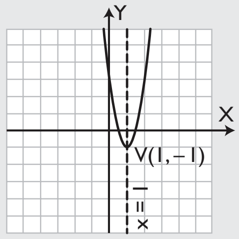
34 Representa la siguiente parábola:

$y = 4x^2 - 8x + 3$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



a) $x = 1$

b) $V(1, -1)$ es un mínimo.

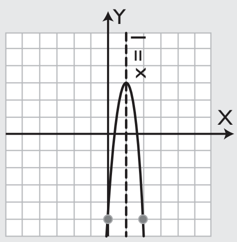
35 Representa la siguiente parábola:

$y = -8x^2 + 16x - 5$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

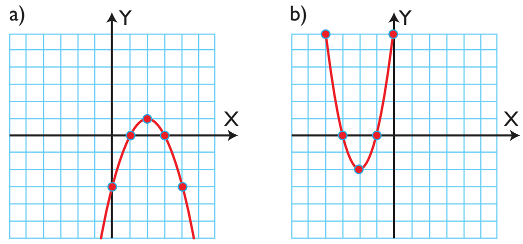
Solución:



a) $x = 1$

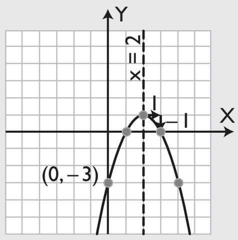
b) $V(1, 3)$ es un máximo.

36 Halla la ecuación de las siguientes parábolas:



Solución:

a)



$a = -1$

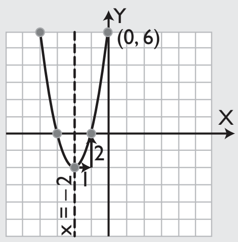
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 4$

$c = -3$

$y = -x^2 + 4x - 3$

b)



$a = 2$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

$c = 6$

$y = 2x^2 + 8x + 6$

Para ampliar

37 Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Halla mentalmente la pendiente, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

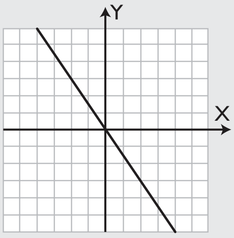
a) $y = -\frac{3x}{2}$ b) $y = -2x - 1$

c) $y = \frac{x}{3} - 4$ d) $y = \frac{x}{4}$

Solución:

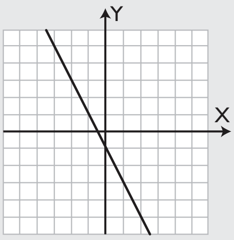
a) Función lineal.

$m = -3/2 \Rightarrow$ Decreciente.



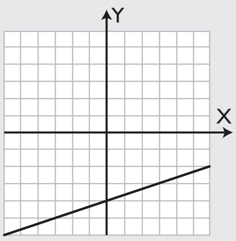
b) Función afín.

$m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.



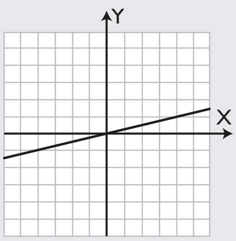
c) Función afín.

$m = 1/3 \Rightarrow$ Creciente.

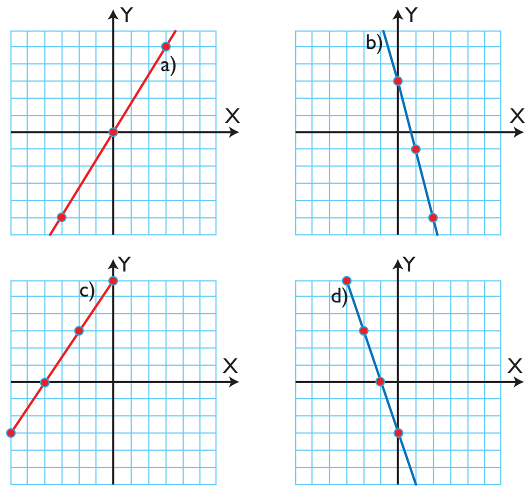


d) Función lineal.

$m = 1/4 \Rightarrow$ Creciente.



38 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



Solución:

a) $y = \frac{5}{3}x$

b) $y = -4x + 3$

c) $y = \frac{3}{2}x + 6$

d) $y = -3x - 3$

39 Representa la siguiente parábola:

$y = 2x^2$

A partir de ella, representa la parábola:

$y = 2(x - 3)^2$

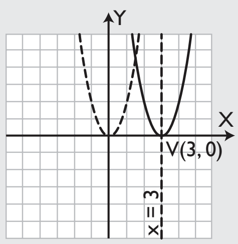
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa ($\cup$) o cóncava ($\cap$)?

Solución:



a) $x = 3$

b) $V(3, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(3, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 3)$

d) Es convexa (∪)

40 Representa la siguiente parábola: $y = -\dfrac{x^2}{4}$

A partir de ella representa la parábola:

$$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$$

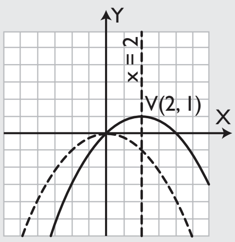
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 2$

b) $V(2, 1)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 2)$

Decreciente (↘): $(2, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

41 Representa la siguiente parábola:

$$y = 3x^2 + 6x + 4$$

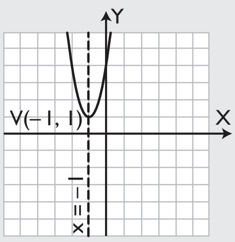
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = -1$

b) $V(-1, 1)$ es un mínimo.

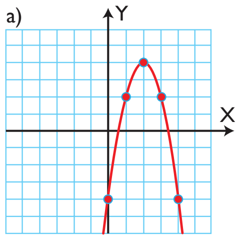
c) Creciente (↗): $(-1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1)$

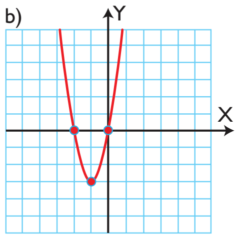
d) Es convexa (∪)

42 Halla la ecuación de las siguientes parábolas:

a)

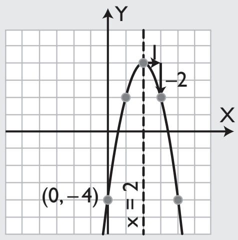


b)



Solución:

a)



$a = -2$

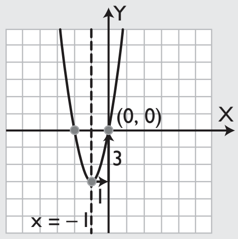
Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$$

$c = -4$

$y = -2x^2 + 8x - 4$

b)



$a = 3$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

$c = 0$

$y = 3x^2 + 6x$

43 Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas con los ejes de coordenadas, representa las parábolas y comprueba el resultado.

a) $y = x^2 + 4x + 3$

b) $y = x^2 - 2x$

c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = x^2 - 2x + 2$

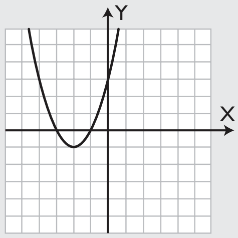
Solución:

a) Eje X:

$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$

$A(-3, 0), B(-1, 0)$

Eje Y: $C(0, 3)$

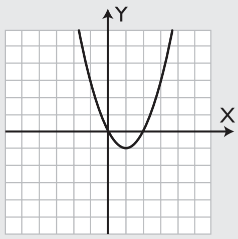


b) Eje X:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$O(0, 0), B(2, 0)$

Eje Y: $O(0, 0)$

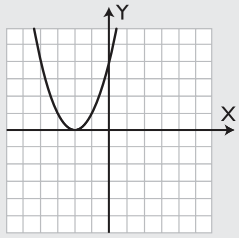


c) Eje X:

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$A(-2, 0)$

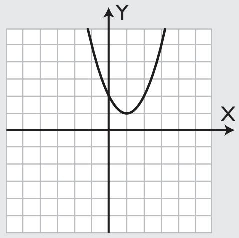
Eje Y: $B(0, 4)$



d) Eje X:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

Eje Y: $A(0, 2)$



44 Halla algebraicamente los puntos de corte de la recta y la parábola siguientes, representa las gráficas y comprueba el resultado:

$y = 2x - 5$

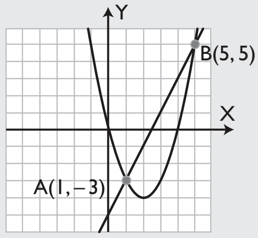
$y = x^2 - 4x$

Solución:

Se resuelve el sistema formado por la ecuación de la recta y de la parábola:

$x = 1, y = -3 \Rightarrow A(1, -3)$

$x = 5, y = 5 \Rightarrow B(5, 5)$



45 Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas, representa las parábolas y comprueba el resultado:

$y = x^2 - 2x - 3$

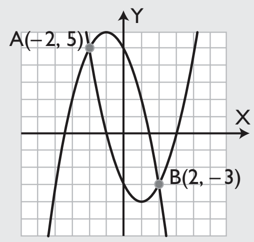
$y = -x^2 - 2x + 5$

Solución:

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos parábolas:

$x = -2, y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$

$x = 2, y = -3 \Rightarrow B(2, -3)$



Problemas

46 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas.

a) ¿Cuánto vale **c**?

b) Si la parábola pasa además por los puntos A(–3, –3) y B(1, 5), calcula el valor de los coeficientes **a** y **b**

c) Escribe la ecuación de la parábola.

d) Represéntala gráficamente.

Solución:

a) $c = 0$

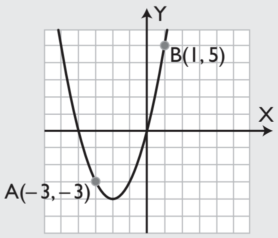
b) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 9a - 3b = -3 \\ a + b = 5 \end{array}\right\}$$

$a = 1, b = 4$

c) $y = x^2 + 4x$

d)



47 Sea la parábola $y = x^2 + bx + c$

a) Calcula los valores de **b** y **c** sabiendo que pasa por los puntos A(4, 3) y B(2, – 1)

b) Escribe la ecuación de la parábola.

c) Represéntala gráficamente.

Solución:

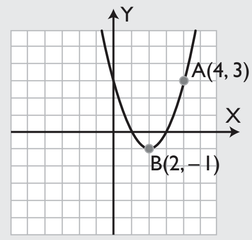
a) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 16 + 4b + c = 3 \\ 4 + 2b + c = -1 \end{array}\right\}$$

$b = -4, c = 3$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c)



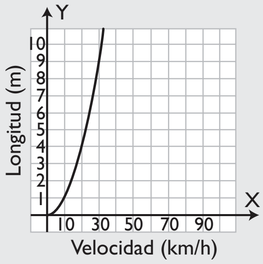
48 La distancia de seguridad que deben guardar los coches entre sí, en circulación, se recoge en la tabla siguiente:

Velocidad (km/h)	Distancia de seguridad (m)
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25
…	…

Expresa la distancia de seguridad en función de la velocidad, y representa la gráfica.

Solución:

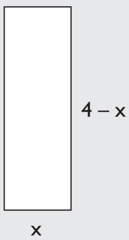
$y = \left(\dfrac{x}{10}\right)^2$



49 El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo, en función del lado **x** de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que el área se hace máxima.

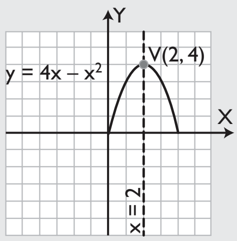
Solución:

Si el perímetro mide 8 m, la base más la altura mide 4 m



$y = x(4 - x)$

$y = 4x - x^2$

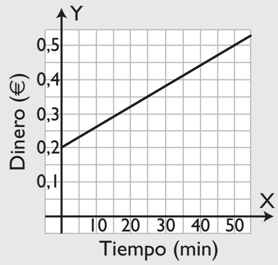


El máximo se obtiene para x = 2, que forma un cuadrado de área 4 m^2

50 Un servicio de telefonía cobra 0,2 € por el uso del servicio y 0,06 € por cada minuto. Escribe la fórmula de la función que expresa el dinero que se paga en función del tiempo y representa su gráfica.

Solución:

$y = 0{,}2 + 0{,}06x$



51 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a **x** € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

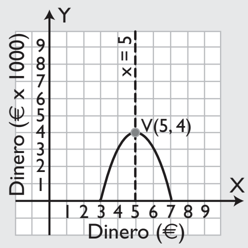
$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

a) Representa la función B(x)

b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:

a)



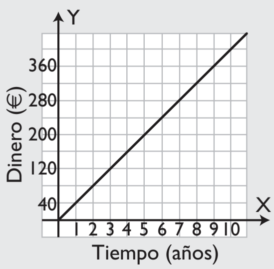
b) A 5 € la unidad, se obtiene el máximo beneficio, que es de 4 000 €

52 Se depositan 2 000 € a un 2% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

Solución:

$y = 2\,000 \cdot 0{,}02 \cdot x$

$y = 40x$



53 La energía cinética de un móvil de masa **m** viene dada por la siguiente fórmula:

$$E(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

donde **v** es la velocidad del móvil en m/s; **m,** la masa en kilos, y **E,** la energía en julios. Dibuja la gráfica que expresa la energía cinética en función de la velocidad de un cuerpo de 1 kg de masa. ¿Qué tipo de gráfica es?

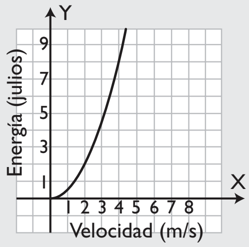
Solución:

$E = \frac{1}{2}mv^2$

Si m = 1 kg

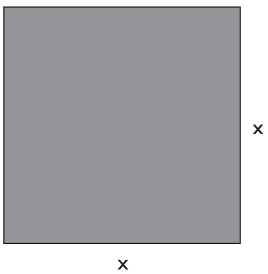
$E = \frac{1}{2}v^2$

Velocidad (m/h)	0	1	2	3	4
Energía (julios)	0	1/2	2	9/2	8



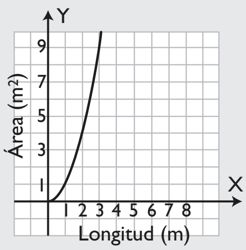
Es una parábola.

54 Halla el área de un cuadrado en función del lado **x.** Represéntala gráficamente.



Solución:

$y = x^2$



Para profundizar

55 Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en V(2, 2) y pasa por P(1, 3)

Solución:

Si el vértice es V(2, 2) y pasa por P(1, 3) $\Rightarrow$ a = 1

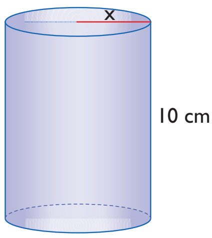
Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + 2b + c = 2 \\ 1 + b + c = 3 \end{array}\right\}$$

$b = -4, c = 6$

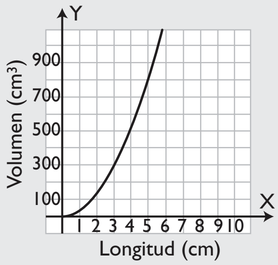
$y = x^2 - 4x + 6$

56 Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 10 cm de altura en función del radio de la base. Represéntala.



Solución:

$y = 10\pi x^2$



57 La demanda y la oferta de un determinado producto en función del precio **x** son:

Oferta: $y = \frac{1}{4}x^2$

Demanda: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

donde **x** se expresa en euros, e **y** es la cantidad ofertada o demandada.

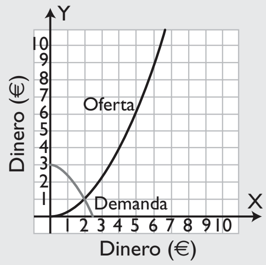
a) Halla el punto de equilibrio algebraicamente.

b) Representa las funciones y comprueba el resultado.

Solución:

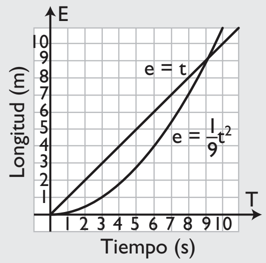
a) Se resuelve el sistema de las dos ecuaciones: $x = 2, y = 1$

b)



58 Dos móviles inician su movimiento desde un punto O. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$, y el segundo móvil, según $e = t$; donde **t** se mide en segundos, y **e,** en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado.

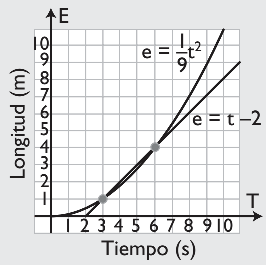
Solución:



Al principio, el 2° móvil recorre un mayor espacio en el mismo tiempo; éste se iguala a los 9 s, y a partir de los 9 s, el 1er móvil recorre un espacio mayor.

59 Dos móviles inician su movimiento desde un punto O. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$, y el segundo móvil, según $e = t$; donde **t** se mide en segundos, y **e,** en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado sabiendo que el segundo móvil parte 2 s más tarde que el primero.

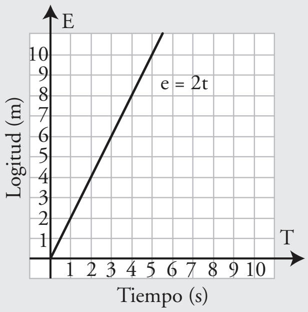
Solución:



El 2° móvil alcanza al primero a los 2 s y está por delante hasta los 6 s, cuando se vuelven a encontrar a los 4 m del recorrido. A partir de ese instante, el 1er móvil va por delante del 2°.

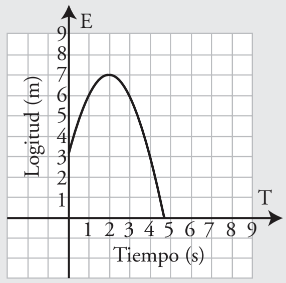
60 Un móvil se desplaza con una velocidad constante de 2 m/s. Halla la ecuación y representa la gráfica que expresa el espacio en función del tiempo.

Solución:



61 Un móvil se desplaza según la fórmula $e = -t^2 + 4t + 3$. Representa la gráfica e indica el valor del espacio inicial, la velocidad inicial y la aceleración.

Solución:



$e_0 = 3$ m

$v_0 = 4$ m/s

$a = -2$ m/s^2

Comprueba lo que sabes

1 Define función cuadrática, pon un ejemplo e indica sus características.

Solución:

Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, siendo **a, b** y **c** números reales y $\mathbf{a} \neq 0$. Su representación gráfica es una **parábola** que tiene las siguientes características:

a) Tiene un eje de simetría cuya fórmula es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

b) Corta al eje X en dos puntos, uno o ninguno, según el número de raíces reales de $ax^2 + bx + c = 0$, y corta al eje Y en el punto (0, c)

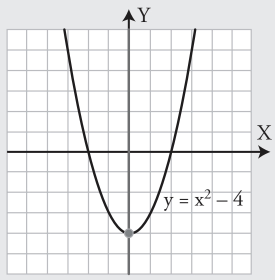
c) El vértice es un mínimo si $\mathbf{a > 0}$, y un máximo si $\mathbf{a < 0}$; por una parte del eje es creciente, y por la otra es decreciente.

d) Es convexa (∪) si $\mathbf{a > 0}$ y cóncava (∩) si $\mathbf{a < 0}$

e) Al aumentar **a** en valor absoluto, se hace más estrecha.

Ejemplo

$y = x^2 - 4$



2 Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines, halla mentalmente la pendiente, indica si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

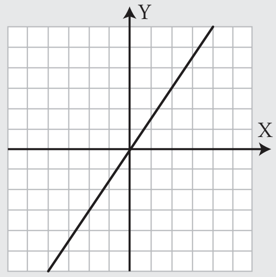
a) $y = 3x/2$

b) $y = -x/2 + 1$

Solución:

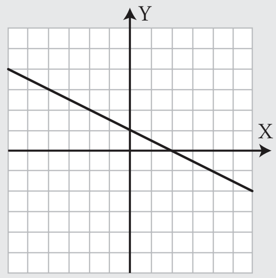
a) Función lineal.

$m = 3/2 \Rightarrow$ Creciente.

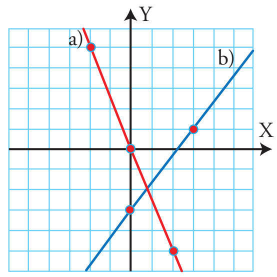


b) Función afín.

$m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.

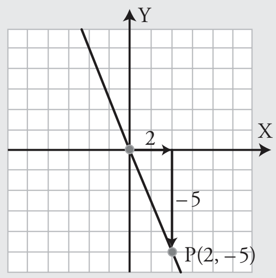


3 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas y clasifícalas.



Solución:

a)

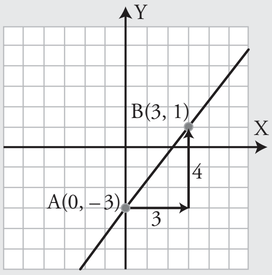


$$m = -\frac{5}{2}$$

$$y = -\frac{5}{2}x$$

Función lineal.

b)



$$m = \frac{1 - (-3)}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

$b = -3$

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

Función afín.

4 Representa la parábola $y = 2x^2$, y a partir de ella, dibuja la parábola:

$$y = 2(x - 1)^2 - 2$$

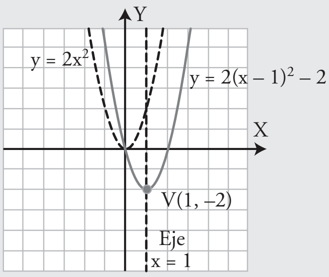
a) Halla el eje de simetría.

b) ¿Cuándo es creciente y cuándo es decreciente?

c) Halla el vértice y di si éste es un máximo o un mínimo.

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 1$

b) Creciente (↗): $(1, +\infty)$

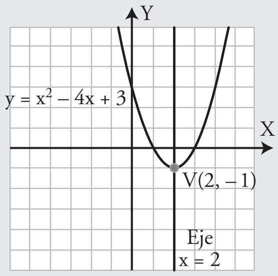
Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

c) $V(1, -2)$ es un mínimo.

d) Es convexa (∪)

5 Representa la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, halla el eje de simetría e indica si el vértice es un máximo o un mínimo.

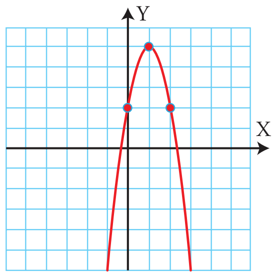
Solución:



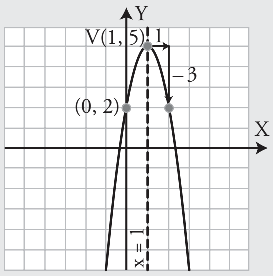
Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -1)$ es un mínimo.

6 Halla la fórmula de la parábola del margen.



Solución:



$a = -3$

Eje de simetría: $x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

$c = 2$

$y = -3x^2 + 6x + 2$

7 Un cristalero quiere hacer marcos rectangulares para espejos que tengan 12 m de perímetro.

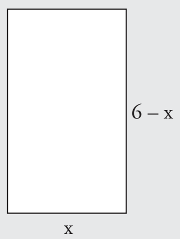
a) Escribe la fórmula que expresa el área de los rectángulos en función del lado **x**

b) Representa la gráfica.

c) ¿Para qué valor de **x** se hace máxima el área del espejo?

Solución:

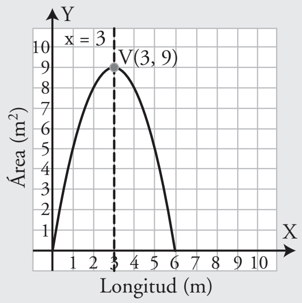
a) Si el perímetro mide 12 m, la base más la altura miden 6 m; por tanto, si la base es **x,** la altura será 6 – x



$y = x(6 - x)$

$y = 6x - x^2$

b)

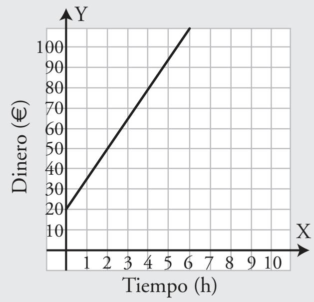


c) El máximo se alcanza cuando el rectángulo es un cuadrado de 3 m de lado y tiene un área de 9 m²

8 Un técnico cobra 20 € por desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que calcula el dinero que cobra en función del tiempo que tarda en hacer un trabajo, y represéntala.

Solución:

$y = 15x + 20$



Paso a paso

62 Dada la función: $y = \frac{3}{2}x - 4$

clasifícala, halla su pendiente y estudia el crecimiento; calcula la ordenada en el origen. Represéntala.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

63 Representa la siguiente parábola:

$$\mathbf{y = x^2 - 2x - 4}$$

Halla el eje de simetría y dibújalo, calcula las coordenadas del vértice y di si es máximo o mínimo, halla dónde es creciente y decreciente y di si es cóncava o convexa.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Geogebra y DERIVE:

64 El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado **x** de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que se hace máxima el área.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

65 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

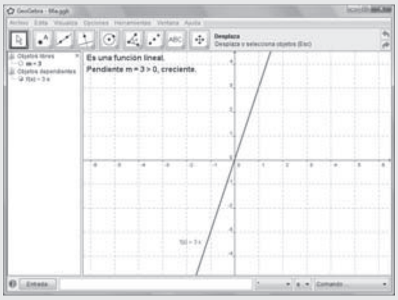
66 Dadas las funciones siguientes:

a) y = 3x   b) y = – 2x   c) y = 2x/3

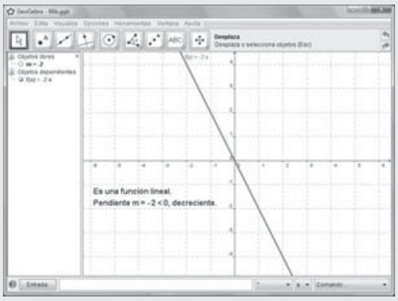
clasifícalas, halla su pendiente y estudia el crecimiento. Represéntalas.

Solución:

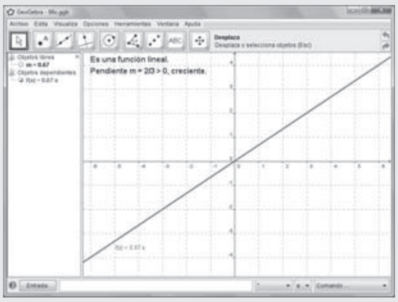
a)



b)



c)



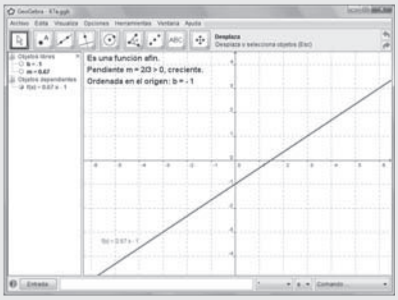
67 Dadas las funciones siguientes:

a) y = 2x/3 – 1   b) y = – 3x/4 + 2

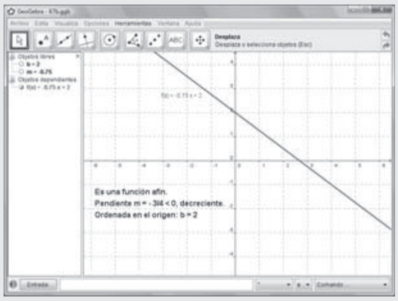
clasifícalas, halla su pendiente y estudia el crecimiento; calcula la ordenada en el origen. Represéntalas.

Solución:

a)

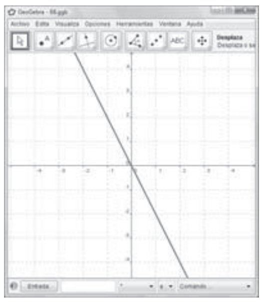


b)



Identifica las siguientes gráficas y halla mediante *ensayo-acierto* su fórmula:

68

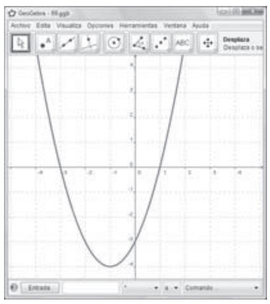


Solución:

a) Función lineal.

b) y = – 2x

69

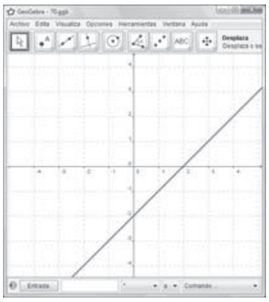


Solución:

a) Función cuadrática.

b) $y = x^2 - 2x - 3$

70

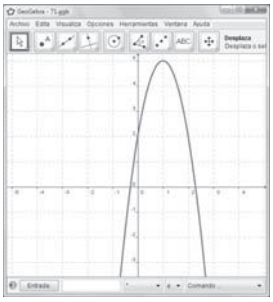


Solución:

a) Función afín.

b) $y = x - 2$

71



Solución:

a) Función cuadrática.

b) $y = -3x^2 + 6x + 2$

72 Halla el eje de simetría, las coordenadas del vértice indicando si es un máximo o un mínimo y representa las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = x^2 - 4x - 1$

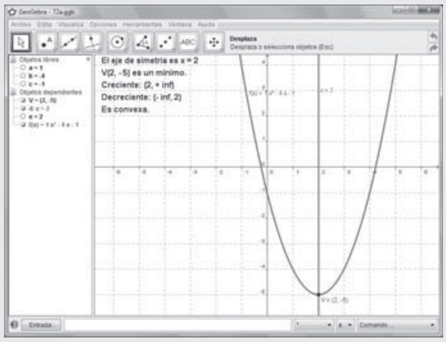
b) $y = -3x^2 - 6x + 2$

c) $y = x^2 + 4x + 3$

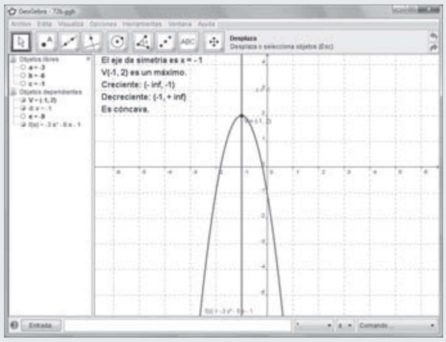
d) $y = -2x^2 + 8x - 5$

Solución:

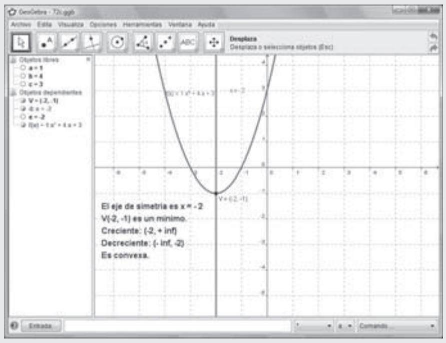
a)



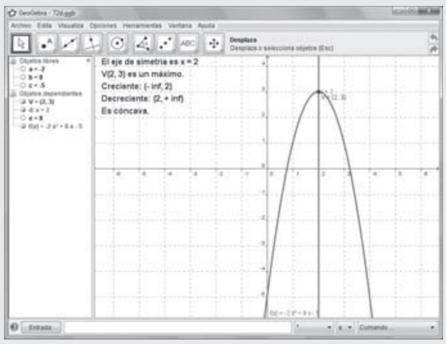
b)



c)



d)



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Geogebra o Derive:

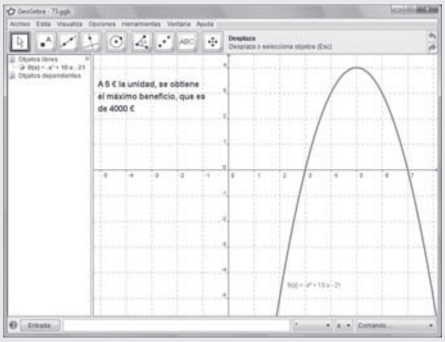
73 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a x € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

a) Representa la función B(x)

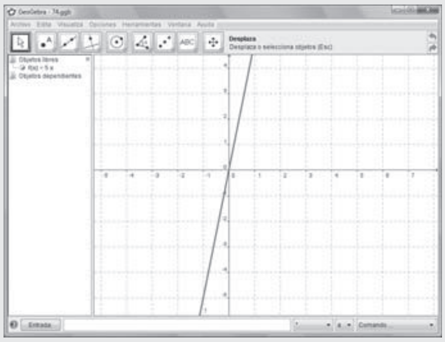
b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:



74 Se depositan 500 € a un 1% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

Solución:



75 Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 1m de altura en función del radio de la base. Represéntala.

Solución: