

12

Límites y derivadas



1. Funciones especiales

PIENSA Y CALCULA

Completa la tabla siguiente:

x	-3,6	3,6	0,8	-0,8
Ent(x)				
Dec(x)				
x				
Signo(x)				

Solución:

x	-3,6	3,6	0,8	-0,8
Ent(x)	-4	3	0	-1
Dec(x)	0,4	0,6	0,8	0,2
x	3,6	3,6	0,8	0,8
Signo(x)	-1	1	1	-1

APLICA LA TEORÍA

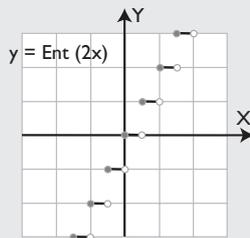
1 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \text{Ent}(2x)$

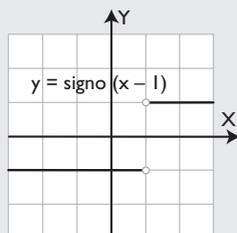
b) $y = \text{signo}(x - 1)$

Solución:

a)



b)



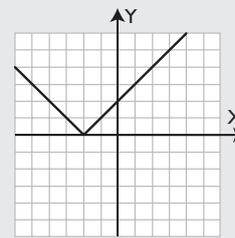
2 Representa las siguientes funciones:

a) $y = |x + 2|$

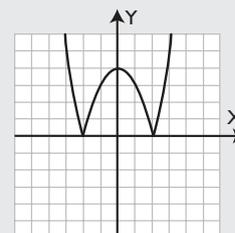
b) $y = |-x^2 + 4|$

Solución:

a)



b)

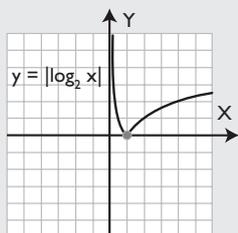


3 Representa las siguientes funciones:

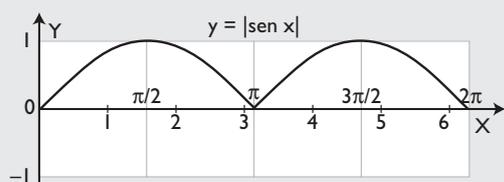
a) $y = |\log_2 x|$ b) $y = |\sin x|$

Solución:

a)



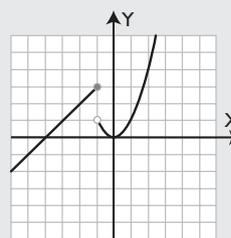
b)



4 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

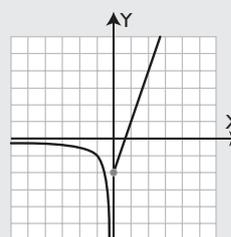
Solución:



5 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



2. Límites

PIENSA Y CALCULA

Completa la tabla y estima el valor al que tiende la función cuando x tiende al infinito:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	...	$x \rightarrow +\infty$
$y = 1/x$								$y \rightarrow$

Solución:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	...	$x \rightarrow +\infty$
$y = 1/x$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	...	$y \rightarrow 0$

APLICA LA TEORÍA

6 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = \infty$

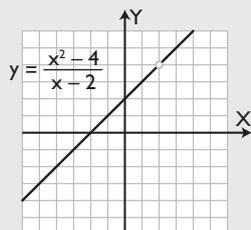
7 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 4x}$

Solución:

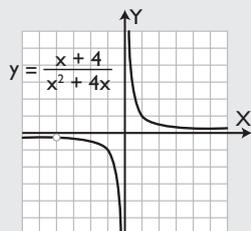
$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \end{aligned}$$

Gráfica:



$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 4x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\cancel{x + 4}}{x(\cancel{x + 4})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Gráfica:



8 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 + 1}{2n^3 - 3}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$
 e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5}{4n^3 - 3}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \frac{5}{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = +\infty$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 + 1}{2n^3 - 3} = 2$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = -\infty$
 e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5}{4n^3 - 3} = 0$
 f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \frac{5}{2}$

3. La derivada

PIENSA Y CALCULA

Un coche va de Asturias a Andalucía; recorre 800 km en 8 horas. ¿Cuál es su velocidad media?

Solución:

$$\text{Velocidad media} = \frac{800}{8} = 100 \text{ km/h}$$

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

9 $f(x) = 3x + 1$ en $[2, 4]$

Solución:

$$\text{TVM}[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{13 - 7}{2} = 3$$

10 $f(x) = x^2 - 1$ en $[2, 3]$

Solución:

$$\text{TVM}[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{8 - 3}{1} = 5$$

11 $f(x) = \frac{2}{x}$ en $[1, 3]$

Solución:

$$\text{TVM}[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2/3 - 2}{2} = -\frac{2}{3}$$

12 $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$

Solución:

$$\text{TVM}[0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

13 $f(x) = 2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$$f'(1) = 2$$

14 $f(x) = -3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$$f'(2) = -3$$

15 $f(x) = x^2$ en $x = 3$

Solución:

$$f'(3) = 6$$

16 $f(x) = -x^2 + 3$ en $x = 2$

Solución:

$$f'(2) = -4$$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

17 $y = 3$

Solución:

$$y' = 0$$

18 $y = x$

Solución:

$$y' = 1$$

19 $y = x^2$

Solución:

$$y' = 2x$$

20 $y = x^5$

Solución:

$$y' = 5x^4$$

21 $y = x^5 + x^2 + x + 3$

Solución:

$$y' = 5x^4 + 2x + 1$$

22 $y = 5x^2 - 7x + 3$

Solución:

$$y' = 10x - 7$$

23 $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Solución:

$$y' = 3x^2 + 6x - 4$$

24 $y = (3x + 5)^4$

Solución:

$$y' = 12(3x + 5)^3$$

25 $y = e^x$

Solución:

$$y' = e^x$$

26 $y = e^{3x-5}$

Solución:

$$y' = 3e^{3x-5}$$

27 $y = L x$

Solución:

$$y' = \frac{1}{x}$$

28 $y = L (3x - 1)$

Solución:

$$y' = \frac{3}{3x-1}$$

29 $y = L (x^2 + 5x - 6)$

Solución:

$$y' = \frac{2x+5}{x^2+5x-6}$$

30 $y = 7x$

Solución:

$$y' = 7$$

31 $y = x e^x$

Solución:

$$y' = (x+1)e^x$$

32 $y = x L x$

Solución:

$$y' = 1 + L x$$

33 $y = e^x L x$

Solución:

$$y' = e^x L x + \frac{e^x}{x}$$

34 $y = \frac{e^x}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

35 $y = \frac{2x+3}{x}$

Solución:

$$y' = -\frac{3}{x^2}$$

36 $y = \frac{5x-1}{3x+2}$

Solución:

$$y' = \frac{13}{(3x+2)^2}$$

4. Aplicaciones de la derivada

PIENSA Y CALCULA

Si la pendiente de una recta es $m = 2$, calcula la pendiente m_{\perp} de cualquier recta perpendicular.

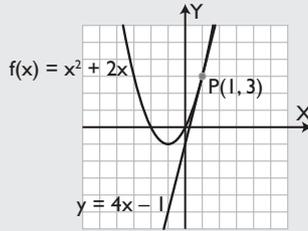
Solución:

Las pendientes son inversas y opuestas, $m_{\perp} = -\frac{1}{2}$

37 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x$ para $x = 1$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

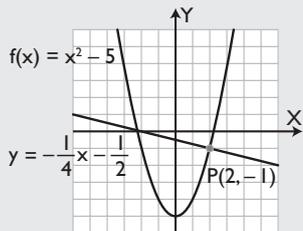
Recta tangente: $y = 4x - 1$



38 Calcula la recta normal a la curva $y = x^2 - 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

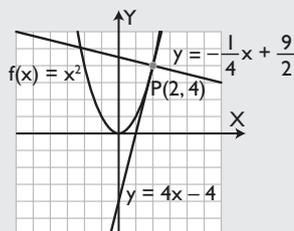


39 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 4x - 4$

Recta normal: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$



40 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 6x + 5$. Dibuja la función.

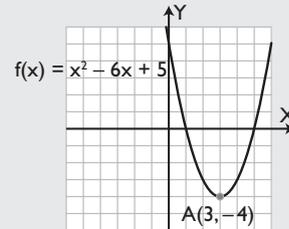
Solución:

$$y' = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0, x = 3, y = -4, A(3, -4)$$

$$y'' = 2$$

$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -4) \text{ mínimo relativo.}$$



41 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 4x$. Dibuja la función.

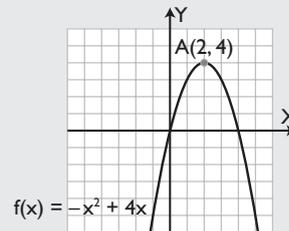
Solución:

$$y' = -2x + 4$$

$$-2x + 4 = 0, x = 2, y = 4, A(2, 4)$$

$$y'' = -2$$

$$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 4) \text{ Máximo relativo.}$$



42 Calcula el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$$y' = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0, x = 1, y = -4, A(1, -4)$$

$$y'' = 2$$

$$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow A(1, -4) \text{ mínimo relativo.}$$

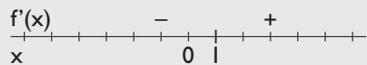
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



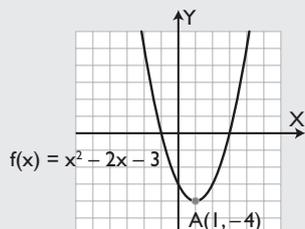
$$y' = 2x - 2$$

$$f'(0) = -$$



$$(\nearrow) = (1, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-\infty, 1)$$



- 43** Halla el crecimiento de la función $y = -x^2 + 6x - 4$.
Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$$y' = -2x + 6$$

$$-2x + 6 = 0, x = 3, y = 5, A(3, 5)$$

$$y'' = -2$$

$$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow A(3, 5) \text{ Máximo relativo.}$$

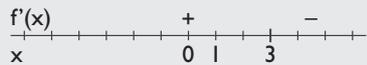
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



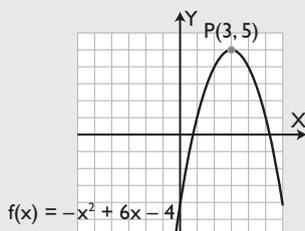
$$y' = -2x + 6$$

$$f'(0) = +$$



$$(\nearrow) = (-\infty, 3)$$

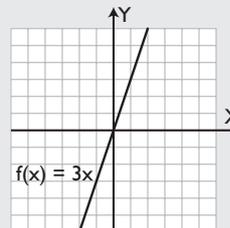
$$(\searrow) = (3, +\infty)$$



- 44** Calcula el crecimiento de la función $y = 3x$. Dibuja la función.

Solución:

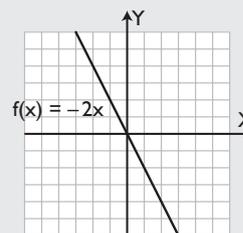
$y' = 3 > 0$, es siempre creciente.



- 45** Halla el crecimiento de la función $y = -2x$. Dibuja la función.

Solución:

$y' = -2 < 0$, es siempre decreciente.



- 46** Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$$

$$x = 1, y = -2, A(1, -2)$$

$$x = -1, y = 2, B(-1, 2)$$

$$y'' = 6x$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2) \text{ Mínimo relativo.}$$

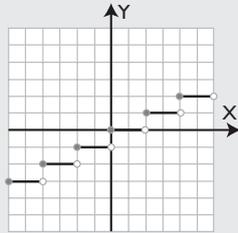
$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2) \text{ Máximo relativo.}$$

Ejercicios y problemas

1. Funciones especiales

47 Representa la siguiente función: $y = \text{Ent}(x/2)$

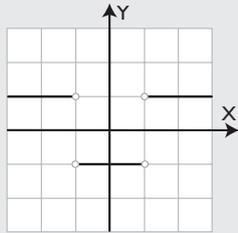
Solución:



48 Representa la siguiente función:

$$y = \text{Signo}(x^2 - 1)$$

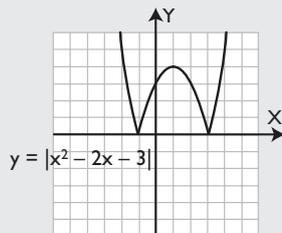
Solución:



49 Representa la siguiente función:

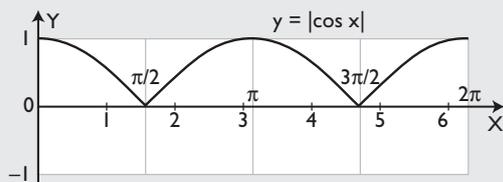
$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

Solución:



50 Representa la siguiente función en el intervalo $[0, 2\pi]$: $y = |\cos x|$

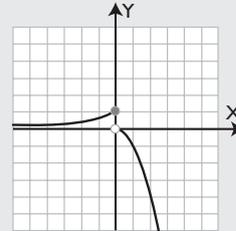
Solución:



51 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

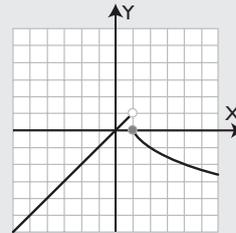
Solución:



52 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \log_{1/2} x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:



2. Límites

53 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x - 3) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x - 3) = +\infty$

54 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x + 2}$$

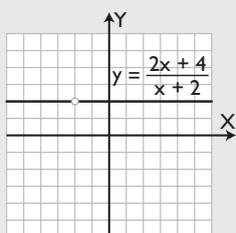
Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} 2 = 2$$

Ejercicios y problemas

Gráfica:



55 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6}$$

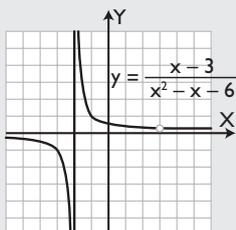
Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x+2)(\cancel{x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

Gráfica:



56 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+7}{x^2+1} = 0$

57 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x} = -5$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4-1}{-x^4+2x} = -5$

58 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-5}{n^4+2n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+n}{-n^3-2n}$

Solución:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-5}{n^4+2n} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+n}{-n^3-2n} = -1$

59 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5+x^2}{x^2-x} = +\infty$

3. La derivada

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

60 $f(x) = 2x - 4$ en $[1, 3]$

Solución:

$$TVM[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

61 $f(x) = x^2 + 4x$ en $[0, 2]$

Solución:

$$TVM[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 0}{2} = 6$$

62 $f(x) = \frac{6}{x}$ en $[2, 3]$

Solución:

$$\text{TVM}[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{2 - 3}{1} = -1$$

63 $f(x) = \sqrt{x + 5}$ en $[-1, 4]$

Solución:

$$\text{TVM}[-1, 4] = \frac{f(4) - f(-1)}{4 + 1} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

64 $f(x) = 3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$$f'(2) = 3$$

65 $f(x) = -2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$$f'(1) = -2$$

66 $f(x) = x^2$ en $x = -3$

Solución:

$$f'(-3) = -6$$

67 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 1$

Solución:

$$f'(1) = -2$$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

68 $y = 9$

Solución:

$$y' = 0$$

69 $y = -x^3$

Solución:

$$y' = -3x^2$$

70 $y = x^7$

Solución:

$$y' = 7x^6$$

71 $y = x^7 - x^3 + x + 9$

Solución:

$$y' = 7x^6 - 3x^2 + 1$$

72 $y = 3x^2 - 4x + 1$

Solución:

$$y' = 6x - 4$$

73 $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 10x + 3$$

74 $y = (2x - 3)^5$

Solución:

$$y' = 10(2x - 3)^4$$

75 $y = e^{-2x + 3}$

Solución:

$$y' = -2e^{-2x + 3}$$

76 $y = L(5x + 2)$

Solución:

$$y' = \frac{5}{5x + 2}$$

77 $y = L(x^2 - 3x + 1)$

Solución:

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

78 $y = 9x$

Solución:

$$y' = 9$$

79 $y = (x + 1)e^x$

Ejercicios y problemas

Solución:

$$y' = (x + 2)e^x$$

80 $y = x \ln(x - 5)$

Solución:

$$y' = \ln(x - 5) + \frac{x}{x - 5}$$

81 $y = e^{3x} \ln x$

Solución:

$$y' = 3e^{3x} \ln x + \frac{e^{3x}}{x}$$

82 $y = \frac{e^{2x}}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{(2x - 1)e^{2x}}{x^2}$$

83 $y = \frac{x}{x - 1}$

Solución:

$$y' = \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

84 $y = \frac{3x + 5}{2x - 1}$

Solución:

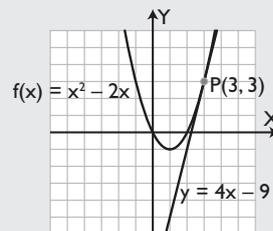
$$y' = \frac{-13}{(2x - 1)^2}$$

4. Aplicaciones de la derivada

85 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ para $x = 3$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

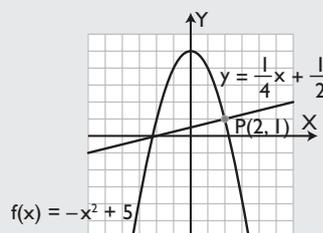
Recta tangente: $y = 4x - 9$



86 Calcula la recta normal a la curva $y = -x^2 + 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

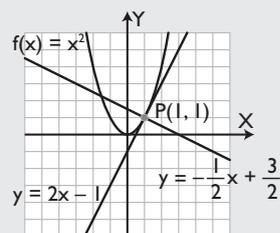


87 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 1$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 2x - 1$

Recta normal: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



88 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x$. Dibuja la función.

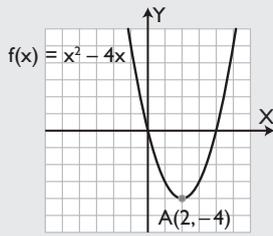
Solución:

$$y' = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0, x = 2, y = -4, A(2, -4)$$

$$y'' = 2$$

$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -4) \text{ mínimo relativo.}$$



89 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 6x - 5$. Dibuja la función.

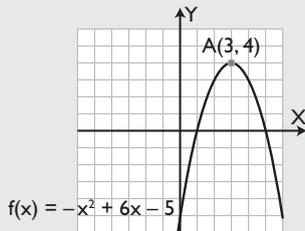
Solución:

$$y' = -2x + 6$$

$$-2x + 6 = 0, x = 3, y = 4, A(3, 4)$$

$$y'' = -2$$

$$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow P(3, 4) \text{ Máximo relativo.}$$



90 Calcula el crecimiento de la función siguiente: $y = x^2 - 6x + 4$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$$y' = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0, x = 3, y = -5, A(3, -5)$$

$$y'' = 2$$

$$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5) \text{ mínimo relativo.}$$

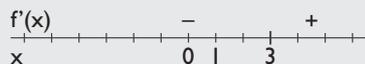
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



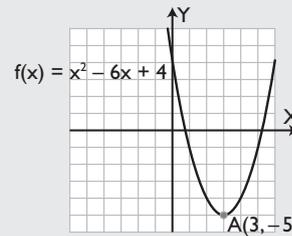
$$y' = 2x - 6$$

$$f'(0) = -$$



$$(\nearrow) = (3, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-\infty, 3)$$



91 Halla el crecimiento de la función siguiente: $y = -x^2 + 2x + 3$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$$y' = -2x + 2$$

$$-2x + 2 = 0, x = 1, y = 4, A(1, 4)$$

$$y'' = -2$$

$$f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow A(1, 4) \text{ Máximo relativo.}$$

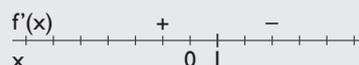
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



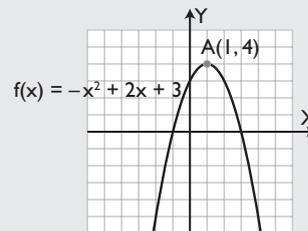
$$y' = -2x + 2$$

$$f'(0) = +$$



$$(\nearrow) = (-\infty, 1)$$

$$(\searrow) = (1, +\infty)$$

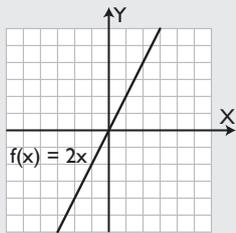


92 Calcula el crecimiento de la función $y = 2x$. Dibuja la función.

Solución:

$$y' = 2 > 0, \text{ es siempre creciente.}$$

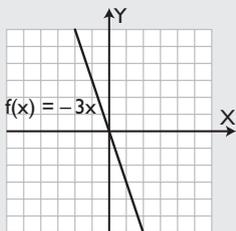
Ejercicios y problemas



- 93** Halla el crecimiento de la función $y = -3x$. Dibuja la función.

Solución:

$y' = -3 < 0$, es siempre decreciente.



- 94** Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^3 + 3x$

Solución:

$$y' = -3x^2 + 3$$

$$-3x^2 + 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$$

$$x = 1, y = 2, A(1, 2)$$

$$x = -1, y = -2, B(-1, -2)$$

$$y'' = -6x$$

$$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow A(1, 2) \text{ Máximo relativo.}$$

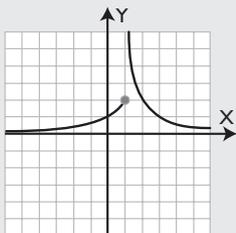
$$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow B(-1, -2) \text{ mínimo relativo.}$$

Para ampliar

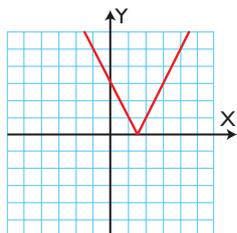
- 95** Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:



- 96** Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:

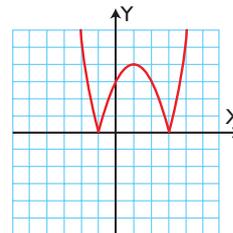


¿Puede haber más de una ecuación?

Solución:

$$y = |2x - 3| \text{ o bien } y = |-2x + 3|$$

- 97** Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:

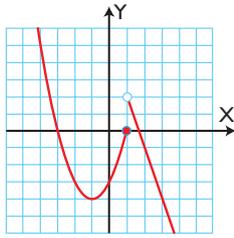


¿Puede haber más de una ecuación?

Solución:

$$y = |x^2 - 2x + 3| \text{ o bien } y = |-x^2 + 2x + 3|$$

- 98** Halla la ecuación de una función definida a trozos cuya representación sea la siguiente gráfica:



Solución:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -3x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

99 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 5x^2 - x + 7)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 + 2x^2 - 3}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 5x^2 - x + 7) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 + 2x^2 - 3} = -2$

100 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 5x)$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 5x + 3) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 5x) = -\infty$

101 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = -\frac{3}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = -\frac{3}{5}$

102 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 1}{5n^2 - 7n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^2 - 3n}$

Solución:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 1}{5n^2 - 7n} = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^2 - 3n} = 1$

103 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3} = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3} = -3$

104 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{-7x^3 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{-7x^3 + x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{-7x^3 + x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{-7x^3 + x} = 0$

105 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

Ejercicios y problemas

106 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x} = 0$$

107 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{4}$$

108 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x+1} = 0$$

109 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2(x-7)}{x^2 - 2x - 35}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2(x-7)}{x^2 - 2x - 35} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2(x-7)}{(x+5)(x-7)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

110 $f(x) = 2x - 1$ en $[-2, 1]$

Solución:

$$TVM[-2, 1] = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 + 5}{3} = 2$$

111 $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

Solución:

$$TVM[-1, 1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

112 $f(x) = 4x - 1$ en $x = 2$

Solución:

$$f'(2) = 4$$

113 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 3$

Solución:

$$f'(3) = -6$$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

114 $y = 4x^4 - 5x^2 - 6x + 2$

Solución:

$$y' = 16x^3 - 10x - 6$$

115 $y = (5x + 1)^4$

Solución:

$$y' = 20(5x + 1)^3$$

116 $y = e^{5x-2}$

Solución:

$$y' = 5e^{5x-2}$$

117 $y = L(x^2 + 5x)$

Solución:

$$y' = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

118 $y = -x$

Solución:

$$y' = -1$$

119 $y = (x - 1)e^x$

Solución:

$$y' = x e^x$$

120 $y = (2x + 1) \cdot x$

Solución:

$$y' = 2 \cdot x + \frac{2x + 1}{x}$$

121 $y = \frac{2x + 3}{4x - 5}$

Solución:

$$y' = \frac{-22}{(4x - 5)^2}$$

122 $y = \frac{-2x + 1}{3x + 4}$

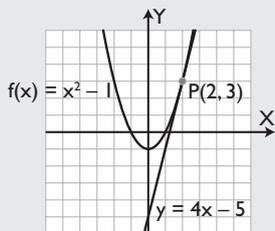
Solución:

$$y' = \frac{-11}{(3x + 4)^2}$$

123 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

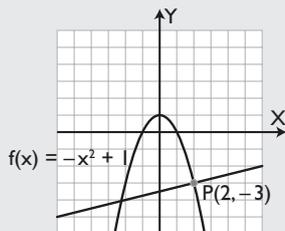
Recta tangente: $y = 4x - 5$



124 Halla la recta normal a la curva $y = -x^2 + 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$



125 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2$. Dibuja la función.

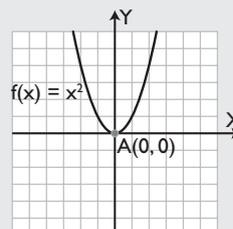
Solución:

$$y' = 2x$$

$$2x = 0, x = 0, y = 0, A(0, 0)$$

$$y'' = 2$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow A(0, 0) \text{ mínimo relativo.}$$



126 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2$. Dibuja la función.

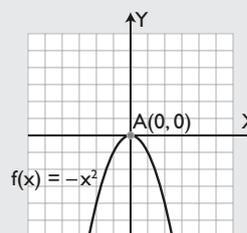
Solución:

$$y' = -2x$$

$$-2x = 0, x = 0, y = 0, A(0, 0)$$

$$y'' = -2$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow A(0, 0) \text{ Máximo relativo.}$$



127 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función $y = e^x$

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$$y' = e^x$$

$e^x \neq 0$ siempre, no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Crecimiento:

$y' = e^x > 0$ siempre, es creciente siempre.

$$(\nearrow) = (-\infty, +\infty)$$

$$(\searrow) = \emptyset$$

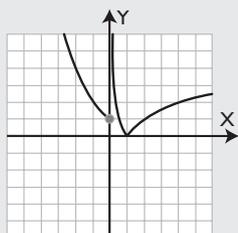
Ejercicios y problemas

Problemas

128 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{si } x \leq 0 \\ |\log_{1/2} x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:



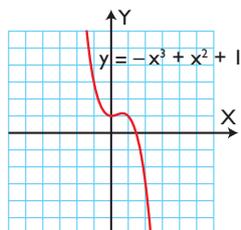
129 Calcula el valor de k para que se verifique:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$$

130 Observando la siguiente gráfica:



calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = +\infty$$

131 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Solución:

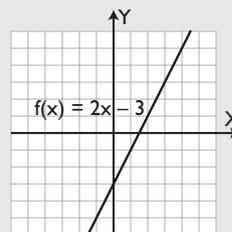
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

132 Dibuja la siguiente función afín:

$$y = 2x - 3$$

- Halla mentalmente la pendiente.
- Halla la pendiente derivando.
- La función ¿es creciente o decreciente?

Solución:



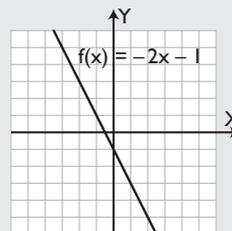
- $m = 2$
- $y' = 2$
- Como $m = y' = 2 > 0$ siempre, la función siempre es creciente.

133 Dibuja la siguiente función afín:

$$y = -2x + 1$$

- Halla mentalmente la pendiente.
- Halla la pendiente derivando.
- La función ¿es creciente o decreciente?

Solución:



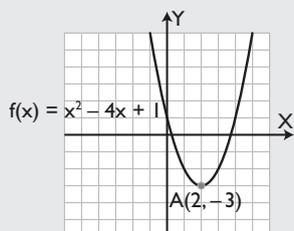
- a) $m = -2$
- b) $y' = -2$
- c) Como $m = y' = -2 < 0$ siempre, la función siempre es decreciente.

134 Dibuja la siguiente parábola:

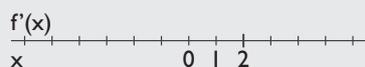
$$y = x^2 - 4x + 1$$

- a) Viendo la gráfica, halla el máximo o mínimo relativo.
- b) Viendo la gráfica, halla el crecimiento.
- c) Halla el máximo relativo o mínimo relativo derivando.
- d) Halla el crecimiento derivando.

Solución:



- a) $A(2, -3)$ es un mínimo relativo.
- b) $(\nearrow) = (2, +\infty)$
 $(\searrow) = (-\infty, 2)$
- c) $y' = 2x - 4$
 $2x - 4, x = 2, y = -3, A(2, -3)$
 $y'' = 2$
 $f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -3)$ mínimo relativo.
- d) Discontinuidades: no hay.



$$y' = 2x - 4$$

$$f'(0) = -$$



$$(\nearrow) = (2, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-\infty, 2)$$

135 Halla las rectas tangente y normal a la curva:

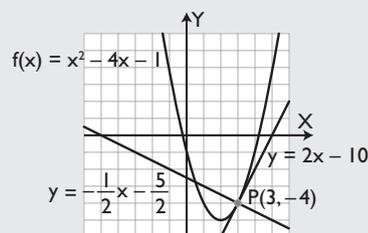
$$y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3$$

Dibuja la función, así como las rectas tangente y normal.

Solución:

$$\text{Recta tangente: } y = 2x - 10$$

$$\text{Recta normal: } y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

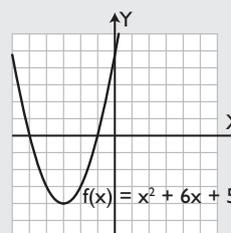


136 Halla el crecimiento de la función:

$$y = x^2 + 6x + 5$$

Dibuja la función.

Solución:



Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$$y' = 2x + 6$$

$$2x + 6 = 0, x = -3, y = -4, A(-3, -4)$$

$$y'' = 2$$

$$f''(-3) = 2 > 0 \Rightarrow A(-3, -4)$$
 mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.



$$y' = 2x + 6$$

$$f'(0) = +$$



$$(\nearrow) = (-3, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-\infty, -3)$$

137 Halla el crecimiento de la función:

$$y = \frac{6}{x}$$

Dibuja la función.

Ejercicios y problemas

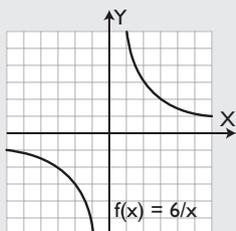
Solución:

$$y' = -\frac{6}{x^2} < 0, \text{ es siempre negativa, decreciente.}$$

Discontinuidades: $x = 0$

$$(\nearrow) = \emptyset$$

$$(\searrow) = (-\infty, +\infty)$$



138 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = x^2 - 6x + 4$$

Solución:

$$y' = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0, x = 3, y = -5, A(3, -5)$$

$$y'' = 2$$

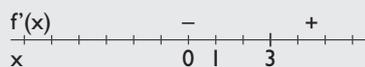
$$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5) \text{ mínimo relativo.}$$

Discontinuidades: no hay.



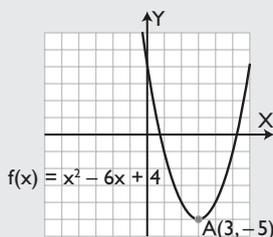
$$y' = 2x - 6$$

$$f'(0) = -$$



$$(\nearrow) = (3, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-\infty, 3)$$



139 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$$y' = x^2 - 4$$

$$x^2 - 4 = 0, x^2 = 2, x = 2, x = -2$$

$$x = 2, y = -16/3, A(2, -16/3)$$

$$x = -2, y = 16/3, B(-2, 16/3)$$

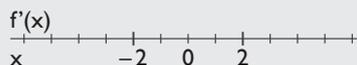
$$y'' = 2x$$

$$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow A(2, -16/3) \text{ mínimo relativo.}$$

$$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow B(-2, 16/3) \text{ Máximo relativo.}$$

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



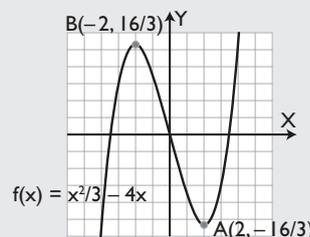
$$y' = x^2 - 4$$

$$f'(1) = -$$



$$(\nearrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-2, 2)$$



140 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = -\frac{x^3}{3} + 4x$$

Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$$y' = -x^2 + 4$$

$$-x^2 + 4 = 0, x^2 - 4 = 0, x^2 = 2, x = 2, x = -2$$

$$x = 2, y = 16/3, A(2, 16/3)$$

$$x = -2, y = -16/3, B(-2, -16/3)$$

$$y'' = -2x$$

$$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 16/3) \text{ M\u00e1ximo relativo.}$$

$$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow B(-2, -16/3) \text{ m\u00ednimo relativo.}$$

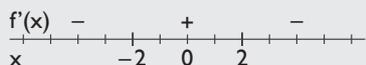
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



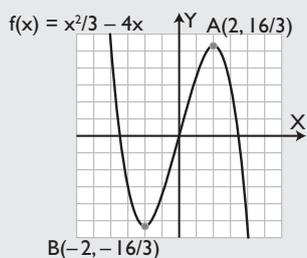
$$y' = x^2 - 4$$

$$f'(1) = -$$



$$(\nearrow) = (-2, 2)$$

$$(\searrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$



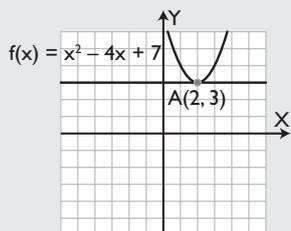
141 Halla la recta tangente a la curva:

$$y = x^2 - 4x + 7$$

para $x = 2$. Dibuja la funci\u00f3n y la recta tangente.

Soluci\u00f3n:

Recta tangente: $y = 3$



142 Los beneficios de una empresa en millones de euros vienen dados por la f\u00f3rmula:

$$y = -x^2 + 18x - 20$$

donde x indica el n\u00famero de a\u00f1os que lleva funcionando. \u00bfQu\u00e9 a\u00f1o alcanza los m\u00e1ximos beneficios?

Soluci\u00f3n:

$$y' = -2x + 18$$

$$-2x + 18 = 0, 2x - 18 = 0, x = 9, y = 61$$

$$y'' = -2$$

$$f''(9) = -2 < 0 \Rightarrow A(9, 61) \text{ M\u00e1ximo relativo.}$$

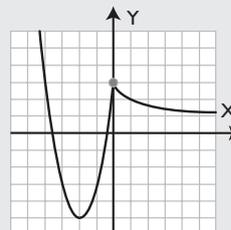
Los m\u00e1ximos beneficios los alcanza en el 9\u00b0 a\u00f1o y son 61 millones de euros.

Para profundizar

143 Representa la siguiente funci\u00f3n:

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+3}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soluci\u00f3n:



144 Halla el crecimiento de la funci\u00f3n $y = x^3 - 3x$. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, esboza la gr\u00e1fica de la funci\u00f3n.

Soluci\u00f3n:

Primero hay que hallar los m\u00e1ximos y m\u00ednimos relativos.

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$$

$$x = 1, y = -2, A(1, -2)$$

$$x = -1, y = 2, B(-1, 2)$$

$$y'' = 6x$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2) \text{ M\u00e1ximo relativo.}$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2) \text{ m\u00ednimo relativo.}$$

Crecimiento:

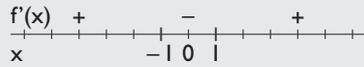
Discontinuidades: no hay.



$$y' = 3x^2 - 3$$

$$f'(0) = -$$

Ejercicios y problemas



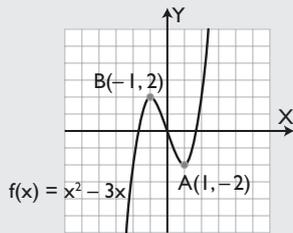
$$(\nearrow) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$(\searrow) = (-1, 1)$$

Límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty$$



145 Halla el crecimiento de la función $y = \frac{2}{x^2}$.

Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

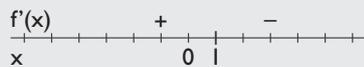
Solución:

$$y' = -\frac{4}{x^3}$$

Discontinuidades de la derivada: $x = 0$ de orden 3, que es impar, luego cambia de crecimiento.



$$f'(1) = -4$$



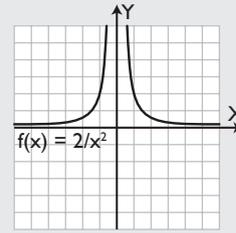
$$(\nearrow) = (-\infty, 0)$$

$$(\searrow) = (0, +\infty)$$

Límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = +\infty$$



146 Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula:

$$y = -x^2 + 8x$$

donde x indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

Solución:

$$y' = -2x + 8$$

$$-2x + 8 = 0, x - 4 = 0, x = 4, y = 16$$

$$y'' = -2$$

$$f''(4) = -2 < 0 \Rightarrow A(4, 16) \text{ Máximo relativo.}$$

Las máximas pérdidas las alcanza en el 4º año y son 16 millones de euros.

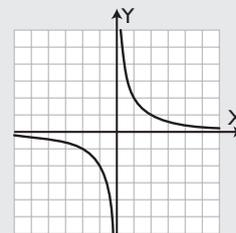
147 Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1, x > 0$$

donde x es el número de años y $f(x)$ son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

Solución:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

La población tiende a cero, por tanto está en vías de extinción.

Aplica tus competencias

148 El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 3t^2 + 2t + 5$, donde t se expresa en segundos, y $e(t)$, en metros. Calcula la velocidad que lleva en el instante $t = 4$ s

Solución:

$$v(t) = e'(t) = 6t + 2$$

$$v(4) = 6 \cdot 4 + 2 = 24 + 2 = 26 \text{ m/s}$$

149 El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 5t^2 - 3t + 1$, donde t se expresa en segundos, y $e(t)$, en metros. Calcula la aceleración que lleva en el instante $t = 2$ s

Solución:

$$v(t) = e'(t) = 10t - 3$$

$$a(t) = v'(t) = 10$$

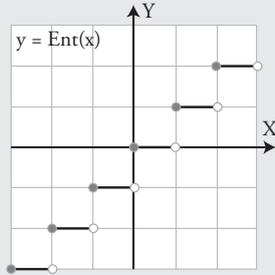
$$a(2) = 10 \text{ m/s}^2$$

Comprueba lo que sabes

1 Define función parte entera y represéntala.

Solución:

La **función parte entera de x** asigna a cada **x** su parte entera. Se representa por $y = \text{Ent}(x)$

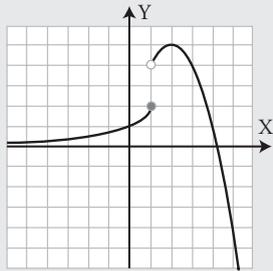


2 Representa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.



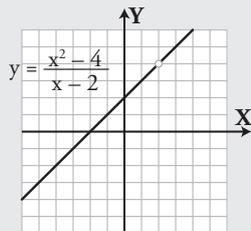
3 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 4x}$

Solución:

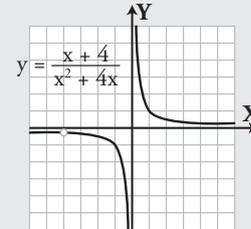
a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

Gráfica:



b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x(x + 4)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x} = -\frac{1}{4}$

Gráfica:



4 Calcula mentalmente los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n^2 + 3n}{n^3 + 1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 3x}{x^3 + 1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$
 f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$

Solución:

- a) -2
 b) -2
 c) 0
 d) 0
 e) -∞
 f) +∞

5 Calcula las derivadas siguientes:

- a) $y = (3x - 5)^4$ b) $y = e^{5x+1}$
 c) $y = L(7x - 2)$ d) $y = x^2 e^x$
 e) $y = \frac{x}{x + 1}$

Solución:

a) $y' = 12(3x - 5)^3$

b) $y' = 5e^{5x+1}$

c) $y' = \frac{7}{7x-2}$

d) $y' = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$

e) $y' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

- 6** Estudia el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$

Solución:

Primero hay que hallar lo máximos y mínimos relativos:

$y = x^2 - 2x - 3$

$y' = 2x - 2$

$y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

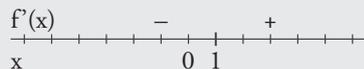
Si $x = 1 \Rightarrow y = -4$

$A(1, -4)$

$y'' = 2$

$y''(1) = 2 > 0 (+) \Rightarrow A(1, -4)$ es un mínimo relativo

Crecimiento:

Creciente: (\nearrow) = $(1, +\infty)$ Decreciente: (\searrow) = $(-\infty, 1)$

- 7** El número de enfermos de gripe que se contabilizan en una localidad durante una epidemia sigue la función:

$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde x se expresa en semanas, y $f(x)$, en miles de personas. Calcula el número medio de enfermos de gripe durante la 2ª y la 4ª semanas; y entre la 4ª y la 6ª semanas. Interpreta los resultados.

Solución:

$$\text{TVM}[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{8 - 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como $\text{TVM}[2, 4] = 1 > 0$, es creciente; es decir, el número medio de enfermos está subiendo.

$$\text{TVM}[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6 - 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Como $\text{TVM}[4, 6] = -1 < 0$, es decreciente; es decir, el número medio de enfermos está bajando.

- 8** Halla las rectas tangente y normal a la curva:

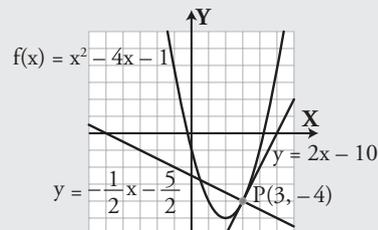
$y = x^2 - 4x - 1$ para $x = 3$

Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 2x - 10$

Recta normal: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$



Paso a paso

- 150** Representa la función parte decimal de x , indica si es periódica y halla el período.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 151** Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 152** Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 153** Halla las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 + 2$ para $x = 1$. Dibuja la curva y las rectas.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 154** **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

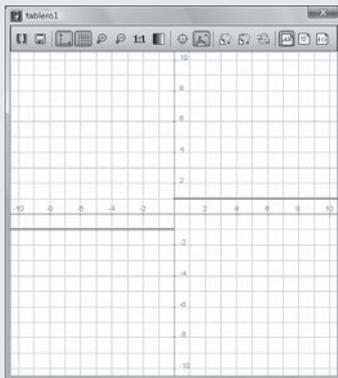
Practica

155 Representa la función signo de x . Halla cuándo no es continua.

Solución:

Ejercicio 155

dibujar (signo(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
Es discontinua en $x = 0$



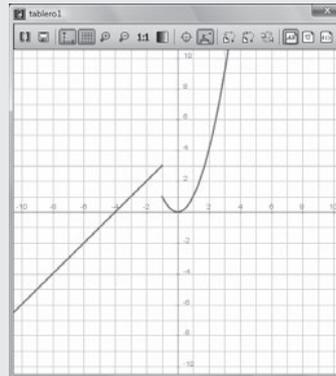
Solución:

Ejercicio 157

dibujar ($x + 4, -\infty..-1, \{color=rojo, anchura_linea=2\}$)

dibujar ($x^2, -1..+\infty, \{color=rojo, anchura_linea=2\}$)

Es discontinua en $x = -1$



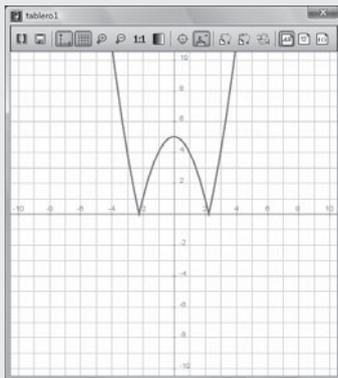
156 Representa la función $y = |x^2 - 5|$

Solución:

Ejercicio 156

dibujar ($|x^2 - 5|, \{color = rojo, anchura_linea = 2\}$)

Es discontinua en $x = 0$



158 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$$

Solución:

Ejercicio 158

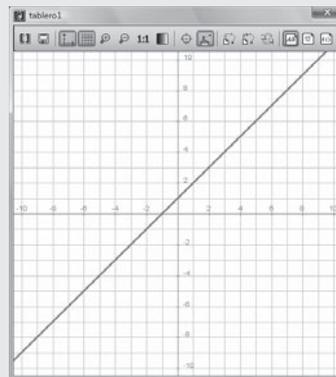
$f(x) = x + 1 \rightarrow x \mapsto x + 1$

$a = 2 \rightarrow 2$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow 3$

dibujar ($f(x), \{color=rojo, anchura_linea=2\}$)

Se observa que cuando $x \rightarrow 2$ y $\rightarrow 3$



157 Representa la siguiente función y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

159 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5)$$

Solución:

Ejercicio 159

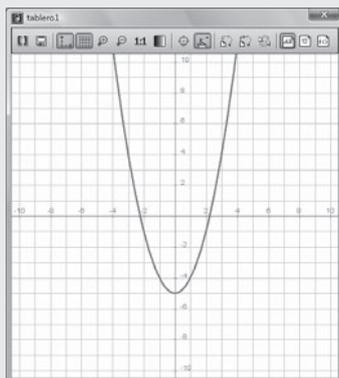
$$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 5$$

$$a = 3 \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow 4$$

dibujar (f(x), {color=rojo, anchura_linea=2})

Se observa que cuando $x \rightarrow 3$, $y \rightarrow 4$



160 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$

Solución:

Ejercicio 160

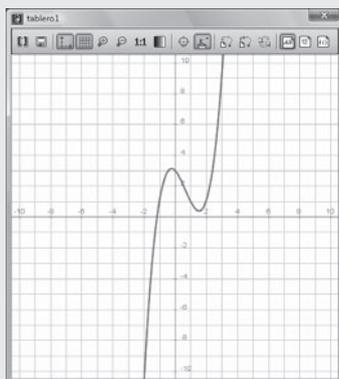
$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3 \rightarrow x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 3$$

$$a = -\infty \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow -\infty$$

dibujar (f(x), {color=rojo, anchura_linea=2})

Se observa que cuando $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$



Calcula las siguientes derivadas

161 $y = 5x^2 - 7x + 3$

Solución:

Ejercicio 161

$$f(x) = 5x^2 - 7x + 3 \rightarrow x \mapsto 5x^2 - 7x + 3$$

$$f'(x) \rightarrow 10x - 7$$

162 $y = e^{3x-5}$

Solución:

Ejercicio 162

$$f(x) = e^{3x-5} \rightarrow x \mapsto e^{3x-5}$$

$$f'(x) \rightarrow 3 \cdot e^{3x-5}$$

163 $y = L(x^2 + 5x - 6)$

Solución:

Ejercicio 163

$$f(x) = \ln(x^2 + 5x - 6) \rightarrow x \mapsto \ln(x^2 + 5x - 6)$$

$$f'(x) \rightarrow \frac{2 \cdot x + 5}{x^2 + 5x - 6}$$

164 $y = x e^x$

Solución:

Ejercicio 164

$$f(x) = x \cdot e^x \rightarrow x \mapsto x \cdot e^x$$

$$f'(x) \rightarrow (x+1) \cdot e^x$$

165 $y = x L x$

Solución:

Ejercicio 165

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto x \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) \rightarrow \ln(x) + 1$$

166 $y = e^x L x$

Solución:

Ejercicio 166

$$f(x) = e^x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto e^x \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) \rightarrow e^x \cdot \ln(x) + \frac{e^x}{x}$$

167 $y = \frac{e^x}{x}$

Solución:

Ejercicio 167
 $f(x) = \frac{e^x}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{1}{x} \cdot e^x$
 $f'(x) \rightarrow \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2}$

168 $y = \frac{5x - 1}{3x + 2}$

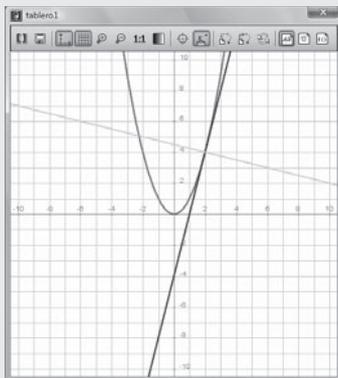
Solución:

Ejercicio 168
 $f(x) = \frac{5x - 1}{3x + 2} \rightarrow x \mapsto \frac{5 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 2}$
 $f'(x) \rightarrow \frac{13}{9 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 4}$

169 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

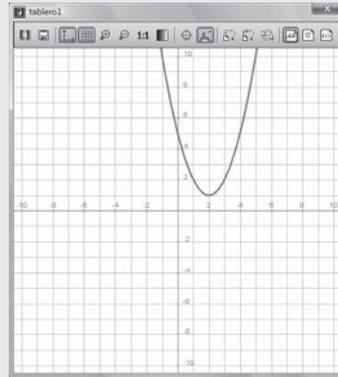
Ejercicio 169
 $f(x) = x^2 \rightarrow x \mapsto x^2$
 $f(2) \rightarrow 4$
 $P(2, 4)$
 $f'(x) \rightarrow 2 \cdot x$
 $f'(2) \rightarrow 4$
 $\text{resolver}\{y - 4 = 4(x - 2)\}, \{y\} \rightarrow \{y = 4 \cdot x - 4\}$
 $\text{resolver}\{y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)\}, \{y\} \rightarrow \left\{ \left\{ y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{9}{2} \right\} \right\}$
 $\text{dibujar}(f(x), \{\text{color}=\text{rojo}, \text{anchura_linea}=2\})$
 $\text{dibujar}(4 \cdot x - 4, \{\text{color}=\text{azul}, \text{anchura_linea}=2\})$
 $\text{dibujar}\left(-\frac{1}{4} \cdot x + \frac{9}{2}, \{\text{color}=\text{verde}, \text{anchura_linea}=2\}\right)$



170 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x + 5$. Dibuja la función.

Solución:

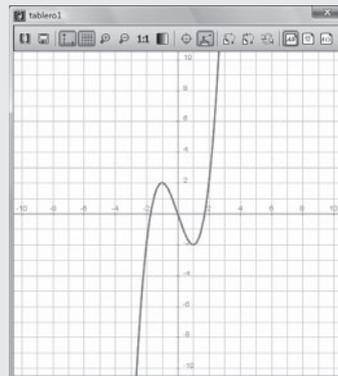
Ejercicio 170
 $f(x) = x^2 - 4x + 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 4 \cdot x + 5$
 $\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x = 2\}$
 $f(2) \rightarrow 1$
 $A(2, 1)$ mínimo relativo.
 $\text{dibujar}(f(x), \{\text{color}=\text{rojo}, \text{anchura_linea}=2\})$



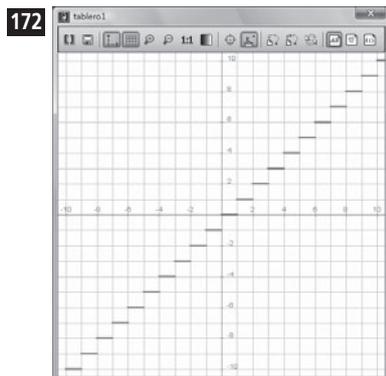
171 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

Solución:

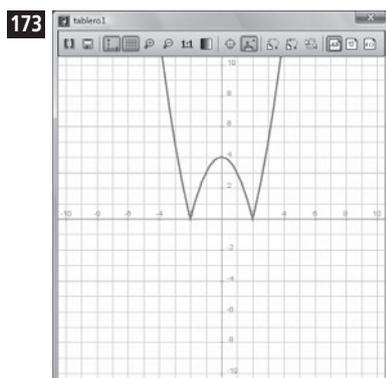
Ejercicio 171
 $f(x) = x^3 - 3x \rightarrow x \mapsto x^3 - 3 \cdot x$
 $\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x = -1\}, \{x = 1\}$
 $f(1) \rightarrow -2$
 $A(1, -2)$ mínimo relativo.
 $f(-1) \rightarrow 2$
 $A(-1, 2)$ máximo relativo.
 $\text{dibujar}(f(x), \{\text{color}=\text{rojo}, \text{anchura_linea}=2\})$



Halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

**Solución:**

Ejercicio 172
`dibujar(suelo(x), {color=rojo, anchura_linea=2})`
 Es la función parte entera.
 $y = \text{Ent}(x)$

**Solución:**

Ejercicio 173
`dibujar(|x2-4|, {color=rojo, anchura_linea=2})`

- 174** Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula: $y = -x^2 + 8x$, donde x indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

Solución:

Ejercicio 174
 $f(x) = -x^2 + 8x \rightarrow x \mapsto -x^2 + 8 \cdot x$
`resolver(f(x) = 0) → {{x=4}}`
 $f(4) \rightarrow 16$
 $A(4, 16)$ máximo relativo.
`dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_linea=2})`
 Las máximas pérdidas se alcanzan el 4º año y son de 16 millones de euros

