8 Resolución de triángulos rectángulos

1. Circunferencia goniométrica

PIENSA Y CALCULA

Escribe la fórmula de la longitud de un arco de circunferencia de radio 1 m, y calcula, en función de π, la longitud del arco correspondiente a:

a) 90° b) 180° c) 270° d) 360°

Solución:

$L = \dfrac{2\pi}{360°} \cdot n°$

a) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \dfrac{\pi}{2}$ m b) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 180° = \pi$ m c) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 270° = \dfrac{3\pi}{2}$ m d) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 360° = 2\pi$ m

APLICA LA TEORÍA

1 Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 30° b) 120° c) 270° d) 315°

Solución:

a) $30° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $120° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

c) $270° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

d) $315° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{7\pi}{4}$ rad

2 Pasa los ángulos siguientes a grados:

a) 0,5 rad b) 1 rad c) 1,5 rad d) 2,5 rad

Solución:

a) $0,5 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 28° \; 38' \; 52''$

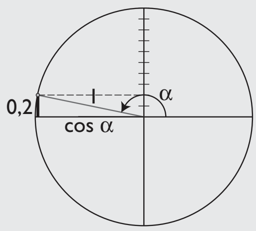
b) $1 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 57° \; 17' \; 45''$

c) $1,5 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 85° \; 56' \; 37''$

d) $2,5 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 143° \; 14' \; 22''$

3 Determina cos α sabiendo que el ángulo α está en el 2° cuadrante y que sen α = 0,2

Solución:

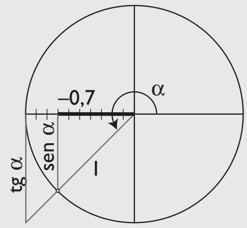


$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0,2^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0,9798$

4 Calcula tg α, sabiendo que el ángulo α está en el 3er cuadrante y que cos α = –0,7

Solución:



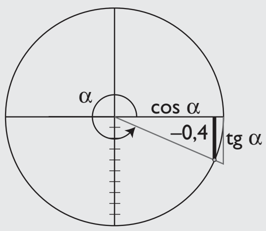
$1 + \text{tg}^2\ \alpha = \sec^2\ \alpha$

$1 + \text{tg}^2\ \alpha = \left(-\dfrac{1}{0,7}\right)^2$

$\text{tg}\ \alpha = 1,0408$

5 Determina las razones trigonométricas del ángulo α si está en el 4° cuadrante y $\text{sen}\ \alpha = -0,4$

Solución:



$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

$(-0,4)^2 + \cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \cos\ \alpha = 0,9165$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = -0,4364$

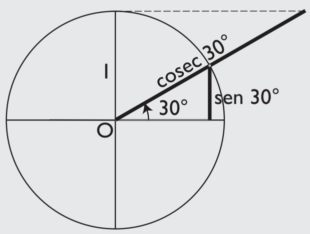
$\sec\ \alpha = 1,0911$

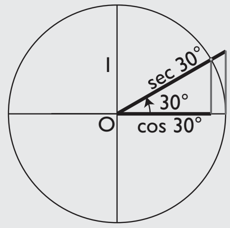
$\text{cosec}\ \alpha = -2,5$

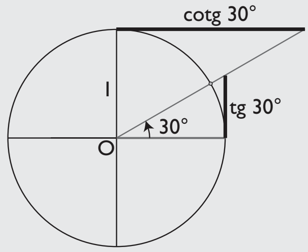
$\text{cotg}\ \alpha = -2,2915$

6 Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 30° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

Solución:





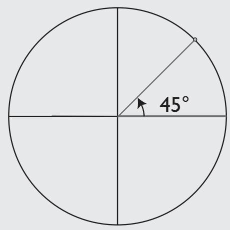


7 Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos siguientes:

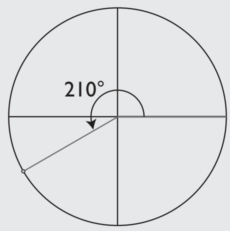
a) 1 485° b) 2 370° c) 2 100°

Solución:

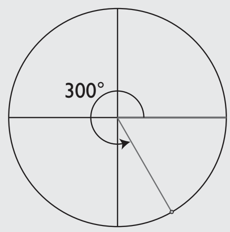
a) 1 485° = 45° + 4 · 360°



b) 2 370° = 210° + 6 · 360°



c) 2 100° = 300° + 5 · 360°



2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

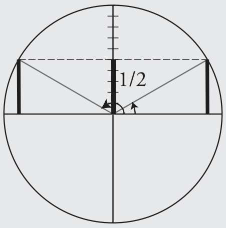
PIENSA Y CALCULA

Dibuja en la circunferencia unidad todos los ángulos que cumplen que:

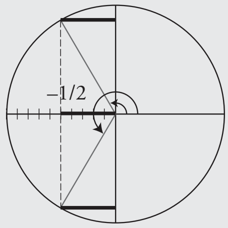
a) sen α = 1/2 b) cos α = – 1/2

Solución:

a)



b)



APLICA LA TEORÍA

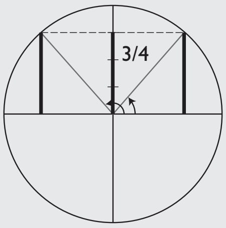
8 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan:

a) sen α = 3/4 b) cos α = – 1/4

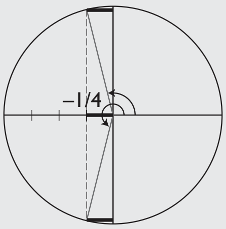
c) sec α = 2,5 d) tg α = 2

Solución:

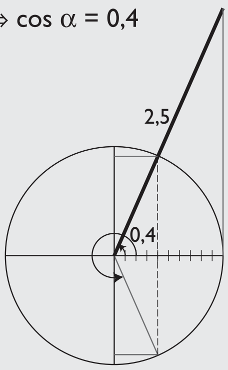
a)



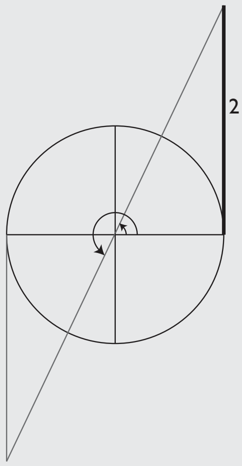
b)



c) sec α = 2,5 $\Rightarrow$ cos α = 0,4



d) tg α = 2



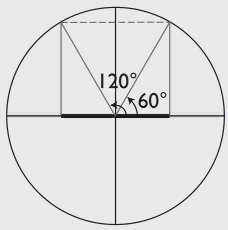
9 Calcula, reduciendo al 1er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) cos 120°

b) sen 300°

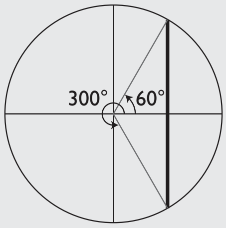
Solución:

a)



$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

b)



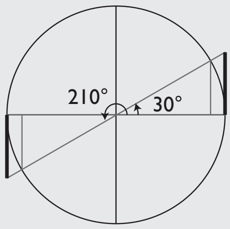
$$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

10 Calcula, reduciendo al 1[er] cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) tg 210° b) sen 135°

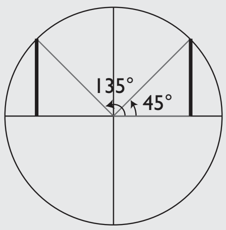
Solución:

a)



$$\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b)



$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

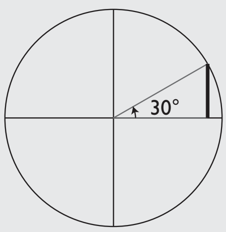
11 Calcula, reduciendo al 1[er] cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) sen 1 830° b) cos 1 230°

c) tg 2 385° d) cos 2 820°

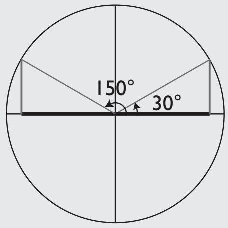
Solución:

a) 1 830° = 30° + 5 · 360°



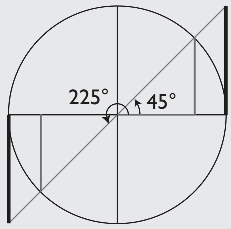
sen 1 830° = sen 30° = 1/2

b) 1 230° = 150° + 3 · 360°



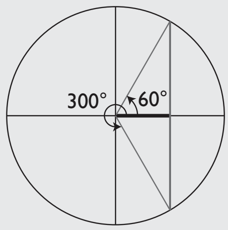
$$\cos 1\,230° = \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) 2 385° = 225° + 6 · 360°



tg 2 385° = tg 225° = tg 45° = 1

d) 2 820° = 300° + 7 · 360°



cos 2 820° = cos 300° = cos 60° = 1/2

12 Demuestra que:

a) $\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$

b) $(\text{cosec } x + \text{tg } x) \cos x = \text{sen } x + \text{cotg } x$

Solución:

a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{\text{sen } x} + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right) \cos x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} + \text{sen } x =$

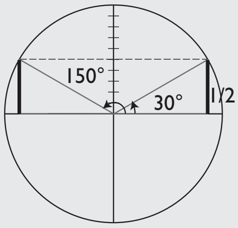
$= \text{cotg } x + \text{sen } x$

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

13 2 sen x = 1

Solución:

sen x = 1/2



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

14 $\cos x = \sec x$

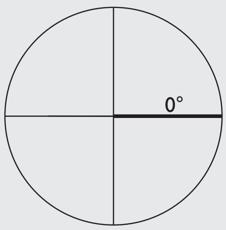
Solución:

$\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cos^2 x = 1$

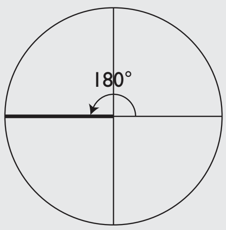
$\cos x = \pm 1$

a) $\cos x = 1$



$x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -1$

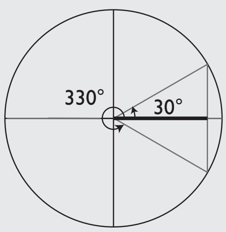


$x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

15 $2 \cos x = \sqrt{3}$

Solución:

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

16 $3 \operatorname{sen} x - 2 \cos^2 x = 0$

Solución:

$3 \operatorname{sen} x - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$

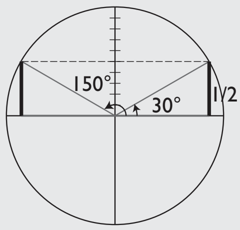
$3 \operatorname{sen} x - 2 + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$

La solución $\operatorname{sen} x = -2$ no tiene sentido, porque $|\operatorname{sen} x| \le 1$

$\operatorname{sen} x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

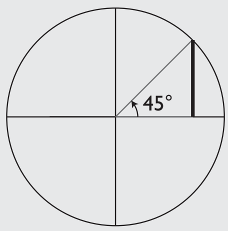
$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

17 $\operatorname{sen} 2x = 1$

Solución:

$2x = 90°$

$x = 45°$



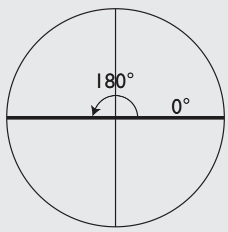
$x = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

18 $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$

Solución:

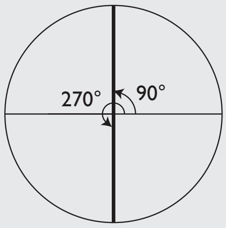
$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

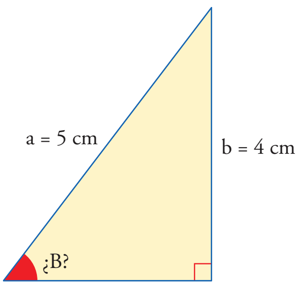
b) $\cos x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 90° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

3. Resolución de triángulos rectángulos

PIENSA Y CALCULA



Escribe la razón trigonométrica que relaciona directamente el valor de los datos conocidos en el triángulo del margen y el ángulo correspondiente. Utilizando la calculadora, halla dicho ángulo.

Solución:

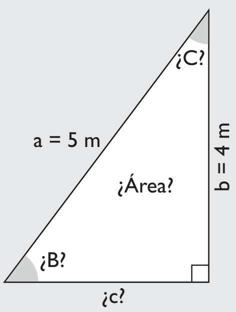
$\text{sen } B = \dfrac{4}{5}$

$B = 53° \ 7' \ 48''$

APLICA LA TEORÍA

19 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 5 m y un cateto b = 4 m. Calcula los demás elementos.

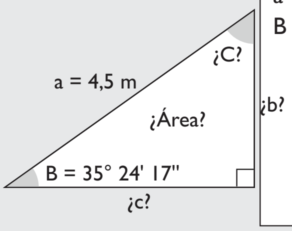
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 5 m b = 4 m	c	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ m
	B	$\text{sen } B = \dfrac{b}{a}$	$\text{sen } B = \dfrac{4}{5} \Rightarrow B = 53° \ 7' \ 48''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 36° \ 52' \ 12''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ m}^2$

20 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 4,5 m y el ángulo B = 35° 24’ 17”. Calcula los demás elementos.

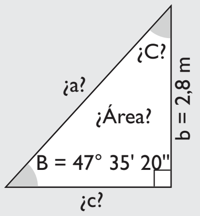
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 4,5 m B = 36° 52’ 12”	C	C = 90° – B	C = 54° 35’ 43”
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	b = 4,5 sen 35° 24’ 17” = 2,61 m
	c	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$	c = 4,5 cos 35° 24’ 17” = 3,67 m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}61 \cdot 3{,}67 = 4{,}79\ m^2$

21 En un triángulo rectángulo se conocen el cateto b = 2,8 m y el ángulo opuesto B = 47° 35’ 20”. Calcula los demás elementos.

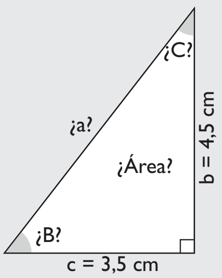
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 2,8 m B = 47° 35’ 20”	C	C = 90° – B	C = 42° 24’ 40”
	a	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B}$	$a = \frac{2{,}8}{\text{sen } 47° 35’ 20”} = b = 3{,}79$ m
	c	$\text{tg } C = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \text{ tg } C$	c = 2,8 tg 42° 24’ 40” = 2,56 m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}56 = 3{,}58\ m^2$

22 En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos b = 4,5 cm y c = 3,5 cm. Calcula los demás elementos.

Solución:

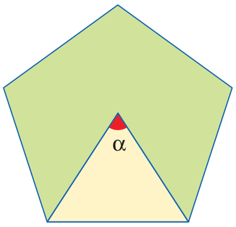


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
b = 4,5 cm c = 3,5 cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$c = \sqrt{4{,}5^2 + 3{,}5^2} = 5{,}70$ cm
	B	$\text{tg } B = \frac{b}{c}$	$\text{tg } B = \frac{4{,}5}{3{,}5} \Rightarrow B = 52° 7’ 30”$
	C	C = 90° – B	C = 37° 52’ 30”
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}5 = 7{,}88\ cm^2$

4. Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el ángulo relleno de rojo del siguiente pentágono regular.

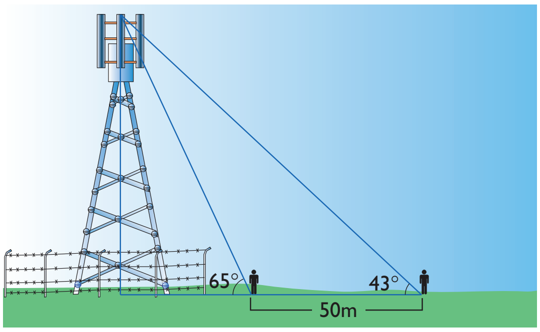


Solución:

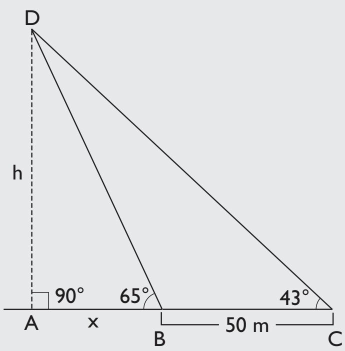
$\alpha = 360° : 5 = 72°$

APLICA LA TEORÍA

23 Una antena de telefonía móvil está en una llanura dentro de una cerca en la que está prohibido entrar. Para hallar su altura, medimos desde un punto exterior el ángulo de elevación y se obtienen 65°. Nos alejamos 50 m y el nuevo ángulo de elevación es de 43°. Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 65° = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 43° = \dfrac{h}{50 + x} \end{array}\right\}$$

$x = 38,47$ m

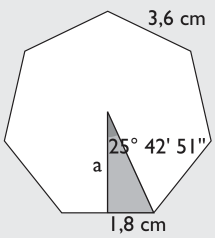
$h = 82,50$ m

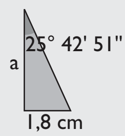
La antena de telefonía móvil mide 82,5 m de alto.

24 Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 3,6 cm

Solución:

360° : 14 = 25° 42' 51''





$$\operatorname{tg} 25° 42' 51'' = \frac{1,8}{a}$$

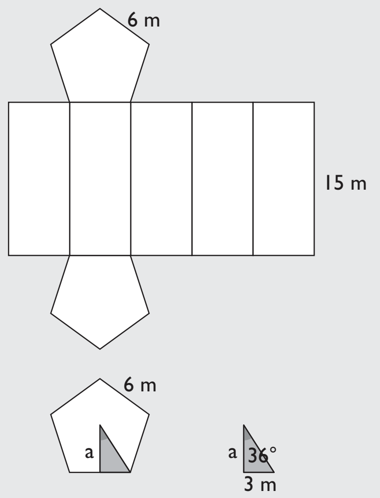
$a = 3,74$ cm

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 3,6 \cdot 3,74}{2} = 47,12 \text{ cm}^2$$

25 Calcula el área de un prisma regular pentagonal en el que la arista de la base mide 6 m, y la altura, 15 m

Solución:



$\text{tg } 36° = \dfrac{3}{a}$

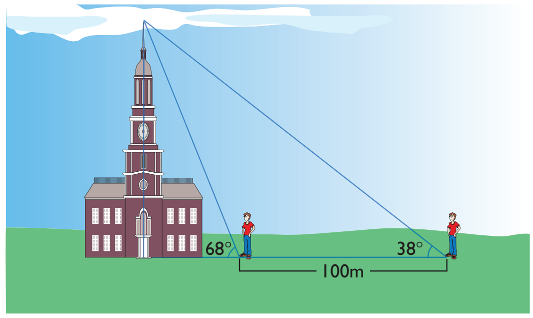
$a = 4{,}13 \text{ m}$

$A_B = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4{,}13}{2} = 61{,}95 \text{ m}^2$

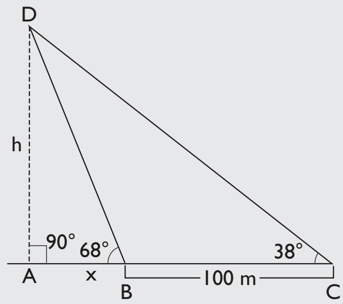
$A_L = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ m}^2$

$A_T = 2 \cdot 61{,}95 + 450 = 573{,}90 \text{ m}^2$

26 Para medir la altura de una catedral, medimos el ángulo de elevación de la parte más alta desde un punto determinado y obtenemos 68°; nos alejamos en la misma dirección 100 m y el nuevo ángulo de elevación es de 38°. Halla la altura de la catedral.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 68° = \dfrac{h}{x} \\ \\ \text{tg } 38° = \dfrac{h}{100 + x} \end{array}\right\}$$

$x = 46{,}13 \text{ m}$

$h = 114{,}17 \text{ m}$

La catedral mide 114,17 m de alto.

1. Circunferencia goniométrica

27 Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 45° b) 150°
c) 210° d) 330°

Solución:

a) $45° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $150° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{5\pi}{6}$ rad

c) $210° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) $330° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{11\pi}{6}$ rad

28 Pasa los ángulos siguientes a grados

a) 2 rad b) $\pi/9$ rad
c) $5\pi/3$ rad d) 1,7 rad

Solución:

a) $2 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 114° \ 35' \ 30''$

b) $\frac{\pi}{9} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 20°$

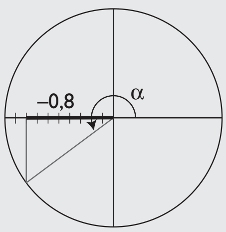
c) $\frac{5\pi}{3} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 300°$

d) $1{,}7 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 97° \ 24' \ 10''$

29 Determina todas las razones trigonométricas del ángulo α si $\cos \alpha = -0{,}8$ y el ángulo α está en el 3^er^ cuadrante.

Solución:

$\cos \alpha = -0{,}8$



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{sen}^2 \alpha + (-0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = -0{,}6$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 0{,}75$

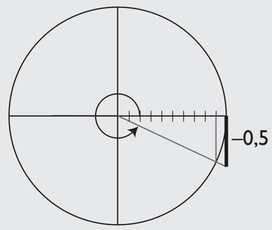
$\sec \alpha = -1{,}25$

$\text{cosec } \alpha = -1{,}6667$

$\text{cotg } \alpha = 1{,}3333$

30 Si la $\text{tg } \alpha = -0{,}5$ y α está en el 4° cuadrante, determina el resto de las razones trigonométricas.

Solución:



$\text{tg } \alpha = -0{,}5$

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

$1 + (-0{,}5)^2 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = 1{,}1180$

$\cos \alpha = 0{,}8944$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -0{,}4472$

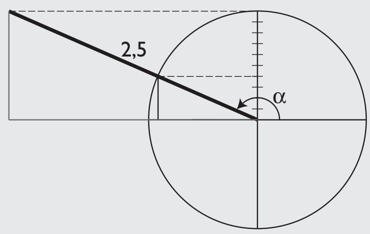
$\text{cosec } \alpha = -2{,}2361$

$\text{cotg } \alpha = -2$

31 Si el ángulo α está en el 2° cuadrante y tenemos $\text{cosec } \alpha = 2{,}5$, determina las razones trigonométricas del ángulo α

Solución:

$\text{cosec } \alpha = 2{,}5 \Rightarrow \text{sen } \alpha = 0{,}4$



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}4^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0{,}9165$

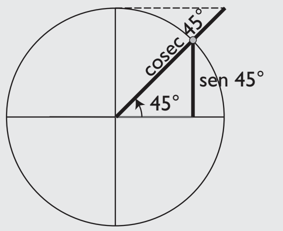
$\sec \alpha = -1{,}0911$

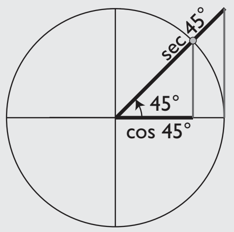
$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -0{,}4364$

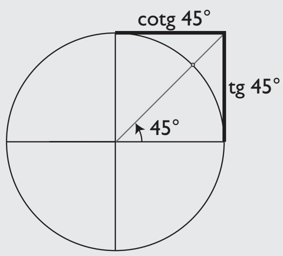
$\text{cotg } \alpha = -2{,}2915$

32 Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 45° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

Solución:

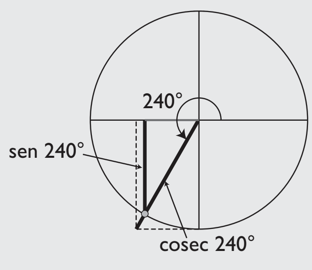


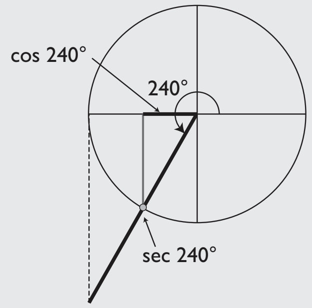


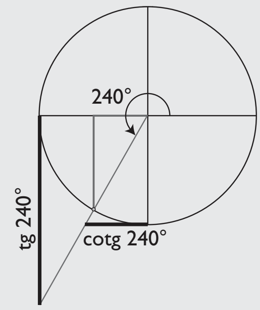


33 Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 240° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

Solución:







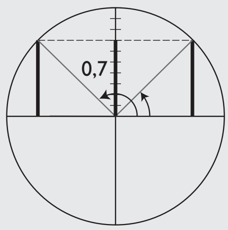
2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

34 Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos que cumplan que:

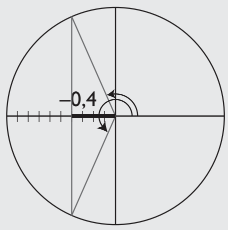
a) sen α = 0,7 b) cos α = –0,4

Solución:

a)



b)

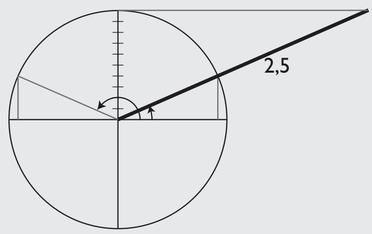


35 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

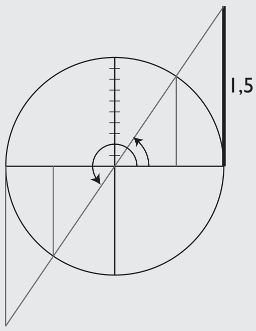
a) cosec α = 2,5 b) tg α = 1,5

Solución:

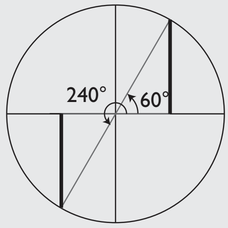
a) cosec α = 2,5



b) $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}5$



d)



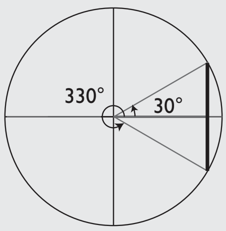
$$\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

36 Calcula, reduciendo al 1[er] cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) sen 330° b) cos 210°
c) tg 120° d) sen 240°

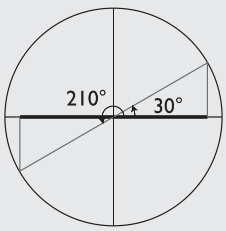
Solución:

a)



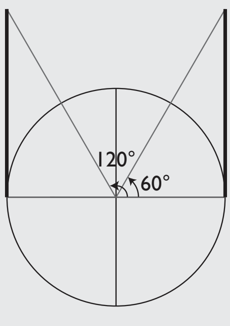
$$\operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

b)



$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)



$$\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$$

37 Demuestra la siguiente identidad:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos \alpha$$

Solución:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha =$

$= \cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) =$

$= \cancel{\cos^3 \alpha} + \cos \alpha - \cancel{\cos^3 \alpha} = \cos \alpha$

38 Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \cdot (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = 1 - \operatorname{tg} \alpha$$

Solución:

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \cdot (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) =$

$= \operatorname{tg} \alpha \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) =$

$= \operatorname{tg} \alpha \cdot \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = 1 - \operatorname{tg} \alpha$

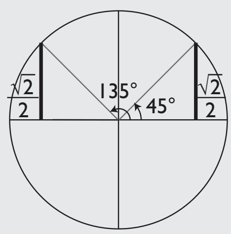
Resuelve las siguientes ecuaciones:

39 $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$

Solución:

$\operatorname{sen} x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

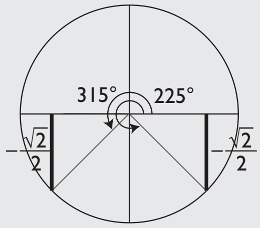
a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_1 = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 135° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



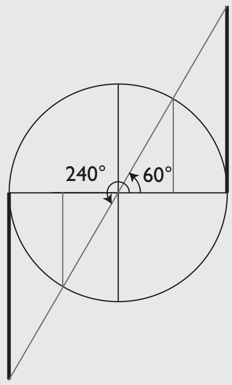
$x_3 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

40 $\text{tg } 2x = \sqrt{3}$

Solución:

Se considera la raíz positiva.



$2x_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 30° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

$2x_2 = 240° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 120° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

41 $4 \text{ sen } x = \text{cosec } x$

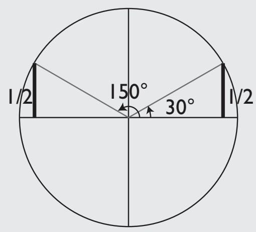
Solución:

$4 \text{ sen } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

$4 \text{ sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm 1/2$

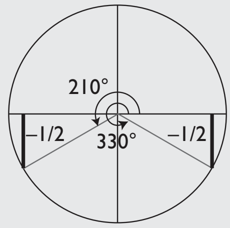
a) $\text{sen } x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -1/2$



$x_3 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

42 $2 \text{ sen } x + 1 = 3 \text{ cosec } x$

Solución:

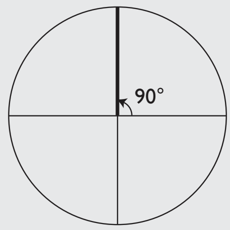
$2 \text{ sen } x + 1 = \dfrac{3}{\text{sen } x}$

$2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 3 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$

$\text{sen } x = -3/2$ no tiene sentido, porque $|\text{sen } x| \leq 1$

$\text{sen } x = 1$



$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

43 $\text{sen } x = \cos^2 x + 1$

Solución:

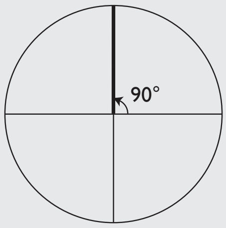
$\text{sen } x = 1 - \text{sen}^2 x + 1$

$\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\text{sen } x = -2$ no tiene sentido, porque $|\text{sen } x| \leq 1$

$\text{sen } x = 1$



$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

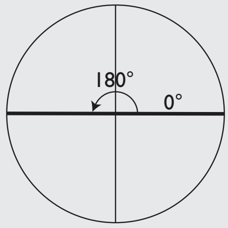
44 sen x · cos x = sen x

Solución:

sen x · cos x – sen x = 0

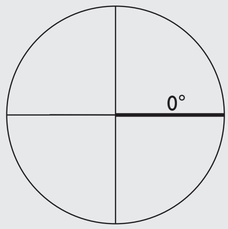
$$\text{sen } x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

a) sen x = 0



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

b) cos x = 1

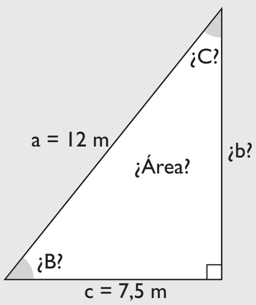


$x_3 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

3. Resolución de triángulos rectángulos

45 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 12 m y un cateto c = 7,5 m. Calcula los demás elementos.

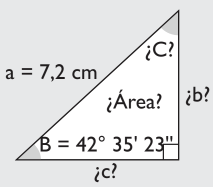
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 12 m c = 7,5 m	b	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$b = \sqrt{12^2 - 7,5^2} = 9,37$ m
	B	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{7,5}{12} \Rightarrow B = 51° 19' 4''$
	C	C = 90° – B	C = 38° 40' 56"
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9,37 \cdot 7,5 = 35,14 \text{ m}^2$

46 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 7,2 cm y el ángulo B = 42° 35' 23". Calcula los demás elementos.

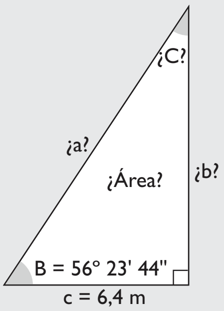
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 7,2 cm B = 42° 35' 23"	C	C = 90° – B	C = 47° 24' 37"
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	b = 7,2 sen 42° 35' 23" = 4,87 cm
	c	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$	c = 7,2 cos 42° 35' 23" = 5,30 cm
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,87 \cdot 5,30 = 12,91 \text{ cm}^2$

47 En un triángulo rectángulo se conocen el cateto c = 6,4 m y el ángulo contiguo B = 56° 23' 44". Calcula los demás elementos.

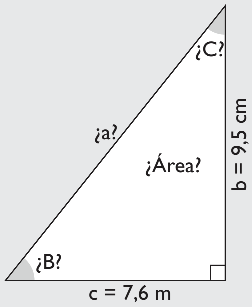
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
c = 6,4 m B = 56° 23' 44"	C	C = 90° – B	C = 33° 36' 16"
	a	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos B}$	$a = \frac{6{,}4}{\cos 56° 23' 44''} = 11{,}56$ m
	b	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \operatorname{tg} B$	b = 6,4 tg 56° 23' 44" = 9,63 m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}63 \cdot 6{,}4 = 30{,}82\ m^2$

48 En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos b = 9,5 cm y c = 7,6 cm. Calcula los demás elementos.

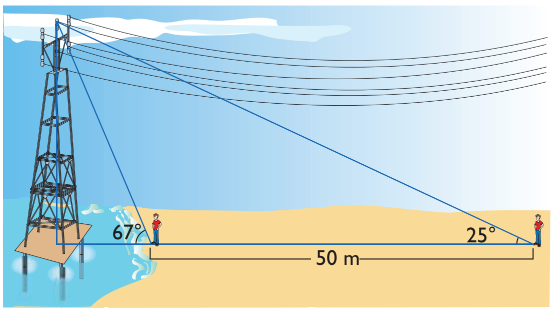
Solución:



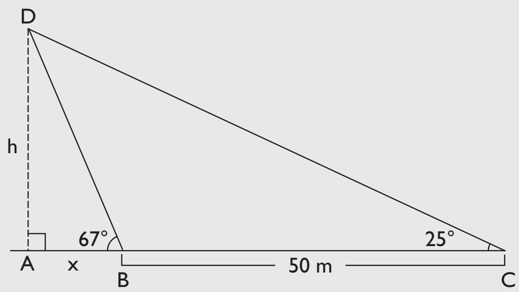
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
b = 9,5 cm c = 7,6 cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$c = \sqrt{9{,}5^2 + 7{,}6^2} = 12{,}17$ cm
	B	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} B = \frac{9{,}5}{7{,}6} \Rightarrow B = 51° 20' 25''$
	C	C = 90° – B	C = 38° 39' 35"
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}5 \cdot 7{,}6 = 36{,}10\ cm^2$

4. Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes

49 Una torre de alta tensión está colocada dentro del mar sobre un soporte. Desde la orilla de la playa se mide el ángulo de elevación de la parte más alta y se obtiene 67°. Alejándose en la misma dirección 50 m, el nuevo ángulo de elevación es de 25°. Calcula la altura de la torre.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 67° &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25° &= \frac{h}{50 + x} \end{aligned}\right\}$$

x = 12,34 m

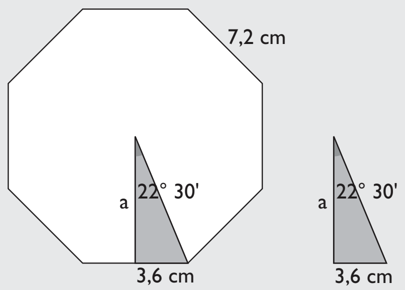
h = 29,07 m

La torre de alta tensión mide 29,07 m de alto.

50 Calcula la apotema de un octógono regular en el que el lado mide 7,2 cm

Solución:

360° : 16 = 22° 30'

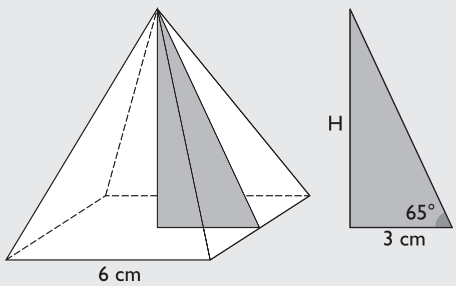


$$\text{tg } 22° \ 30' = \frac{3,6}{a}$$

a = 8,89 cm

51 Calcula el volumen de una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 6 cm y el ángulo que forma la base con las caras laterales es de 65°

Solución:



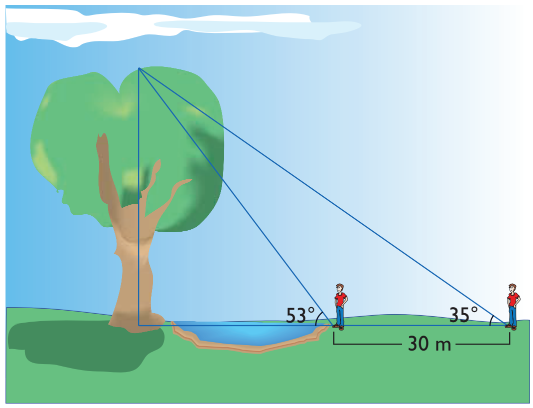
$$\text{tg } 65° = \frac{H}{3}$$

H = 6,43 cm

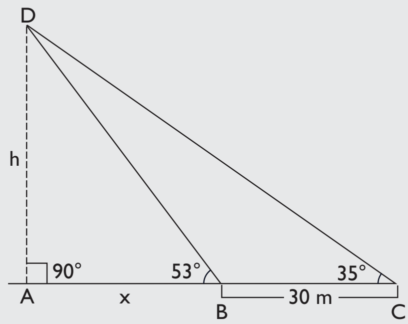
$A_B = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6,43 = 77,16 \text{ cm}^2$$

52 Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtienen 53°. Alejándose 30 m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 35°. Calcula la anchura del río.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 53° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 35° &= \frac{h}{30 + x} \end{aligned}\right\}$$

x = 33,51 m

h = 44,47 m

El río mide de ancho 33,51 m

Para ampliar

53 Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 120° b) 135°
c) 240° d) 300°

Solución:

a) $120° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

b) $135° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $240° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{4\pi}{3}$ rad

d) $300° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

54 Pasa los ángulos siguientes a grados:

a) 3,5 rad b) 3 rad
c) 2,6 rad d) 0,4 rad

Solución:

a) $3{,}5 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 200°\ 32'\ 7''$

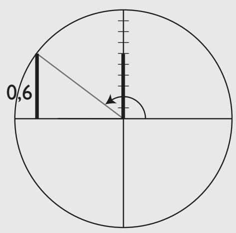
b) $3 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 171°\ 53'\ 14''$

c) $2{,}6 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 148°\ 58'\ 9''$

d) $0{,}4 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 22°\ 55'\ 6''$

55 Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que sen $\alpha = 0{,}6$ y α está en el 2° cuadrante.

Solución:



$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}6^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0{,}8$

$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = -0{,}75$

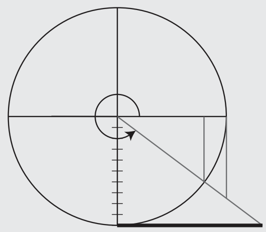
$\sec \alpha = -1{,}25$

$\text{cosec}\, \alpha = 1{,}67$

$\text{cotg}\, \alpha = -1{,}33$

56 Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que cotg $\alpha = -3/2$ y α está en el 3^er^ cuadrante.

Solución:



$1 + \text{cotg}^2\, \alpha = \text{cosec}^2\, \alpha$

$1 + (-3/2)^2 = \text{cosec}^2\, \alpha$

$\text{cosec}\, \alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\text{sen}\, \alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{tg}\, \alpha = -2/3$

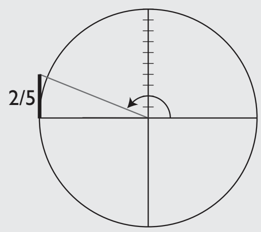
$\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \text{cotg}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha$

$\cos \alpha = -\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

$\sec \alpha = \dfrac{13}{3\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

57 Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que tg $\alpha = -2/5$ y α está en el 2° cuadrante.

Solución:



$1 + \text{tg}^2\, \alpha = \sec^2 \alpha$

$1 + (-2/5)^2 = \sec^2 \alpha$

$$\sec \alpha = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos \alpha \cdot \text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{29}{2\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

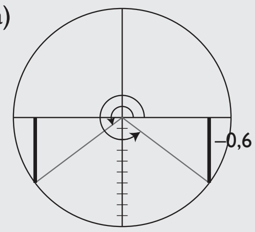
58 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

a) $\text{sen } \alpha = -0,6$

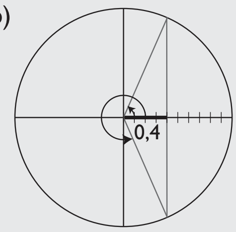
b) $\cos \alpha = 0,4$

Solución:

a)



b)



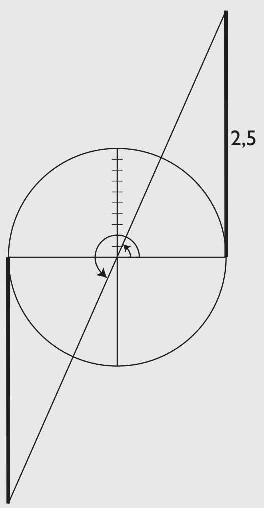
59 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

a) $\text{tg } \alpha = 2,5$

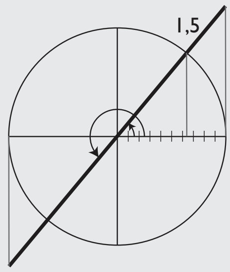
b) $\sec \alpha = 1,5$

Solución:

a)



b)



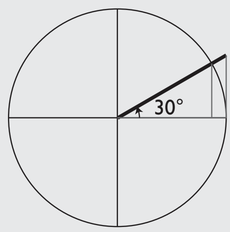
60 Calcula, reduciendo al 1[er] cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) sec 3 270°   b) cos 3 000°

c) tg 2 040°   d) sen 2 850°

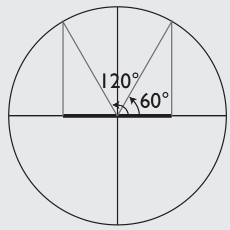
Solución:

a) $3\,270° = 30° + 9 \cdot 360°$



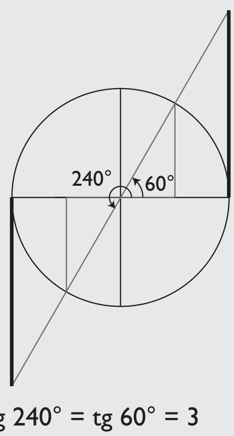
$$\sec 3\,270° = \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $3\,000° = 120° + 8 \cdot 360°$



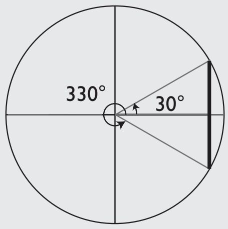
$\cos 3\,000° = \cos 120° = -\cos 60° = -1/2$

c) $2\,040° = 240° + 5 \cdot 360°$



$\text{tg } 2\,040° = \text{tg } 240° = \text{tg } 60° = 3$

d) $2850° = 330° + 7 \cdot 360°$



$\text{sen } 2850° = \text{sen } 330° = -1/2$

61 Calcula las razones trigonométricas siguientes sabiendo que $\text{sen } 15° = 0{,}2588$:

a) sen 165° b) sen 195°
c) sen 345° d) cos 105°
e) cos 255° f) cos 285°

Solución:

a) $\text{sen } 165° = \text{sen } (180° - 15°) = \text{sen } 15° = 0{,}2588$

b) $\text{sen } 195° = \text{sen } (180° + 15°) = -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

c) $\text{sen } 345° = \text{sen } (360° - 15°) = -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

d) $\cos 105° = \cos (180° - 75°) = -\cos 75° = -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

e) $\cos 255° = \cos(180° + 75°) = -\cos 75° = -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

f) $\cos 285° = \cos(360° - 75°) = \cos 75° = \text{sen } 15° = 0{,}2588$

62 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 0{,}4$ y α es un ángulo del 1er cuadrante, calcula:

a) $\text{sen } (180° - \alpha)$
b) $\text{sen } (360° - \alpha)$
c) $\text{sen } (90° + \alpha)$

Solución:

a) $\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}4$

b) $\text{sen } (360° - \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0{,}4$

c) $\text{sen } (90° + \alpha) = \cos \alpha$

Se calcula $\cos \alpha$

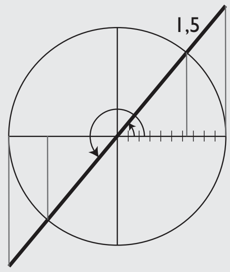
$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}4^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = 0{,}9165$

63 Dibuja en la circunferencia un ángulo α tal que $\sec \alpha = 3/2$. Calcula $\cos(\alpha + \pi)$

Solución:



$\cos (\alpha + \pi) = -\cos \alpha = -2/3$

64 Demuestra la siguiente identidad:

$\text{tg } \alpha \cdot (\cos \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha) = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$

Solución:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \cdot (\cos \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha)$$

$$\text{sen } \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha + \sec \alpha - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha + \sec \alpha - \sec \alpha + \cos \alpha$$

$$\text{sen } \alpha + \cos \alpha$$

65 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{2 \text{ tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha (1 + \text{tg}^2 \alpha)} = 2 \text{ sen } \alpha$$

Solución:

$$\frac{2 \text{ tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha \sec^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{ sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} : \frac{\text{sen } \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{ sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} : \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{ sen}^2 \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \alpha} =$$

$$= 2 \text{ sen } \alpha$$

66 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \text{sen } \alpha}$$

Solución:

$(1 + \text{sen}\ \alpha)(1 - \text{sen}\ \alpha) = \cos^2 \alpha$

$1 - \text{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

67 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

Solución:

$$\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

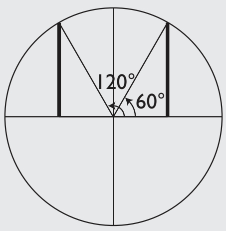
Resuelve las siguientes ecuaciones:

68 $\text{sen}\,(x + 45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

$\text{sen}\ (x + 45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Se toma la raíz positiva.



$x_1 + 45° = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 15° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 + 45° = 120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 75° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

69 $\cos^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

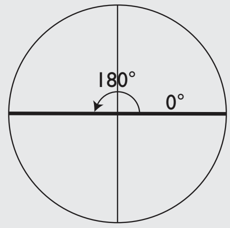
Solución:

$\cos^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

$1 - \text{sen}^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

$2\,\text{sen}^2 x = 0$

$\text{sen}\ x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

70 $3\,\text{tg}\ x = 2 \cos x$

Solución:

$3\,\text{sen}\ x = 2 \cos^2 x$

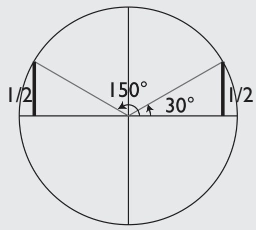
$3\,\text{sen}\ x = 2(1 - \text{sen}^2 x)$

$2\,\text{sen}^2 x + 3\ \text{sen}\ x - 2 = 0$

$$\text{sen}\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

La solución sen x = –2 no es válida.

$\text{sen}\ x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

71 $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}\ x$

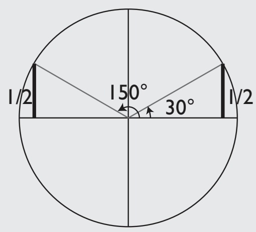
Solución:

$1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}\ x$

$2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\ x - 1 = 0$

$$\text{sen}\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

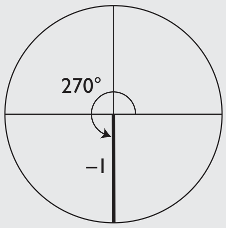
a) $\text{sen}\ x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) sen x = – 1



$x_3 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

72 $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = -1/2$

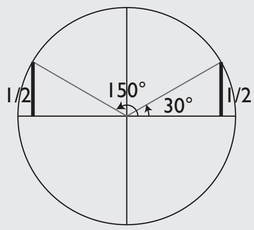
Solución:

$\text{sen}^2 x - 1 + \text{sen}^2 x = -1/2$

$2\,\text{sen}^2 x = 1/2$

$\text{sen } x = \pm 1/2$

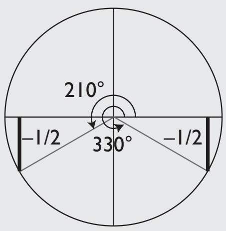
a) sen x = 1/2



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) sen x = –1/2



$x_3 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

73 $\cos^2 x + \cos x = \text{sen}^2 x$

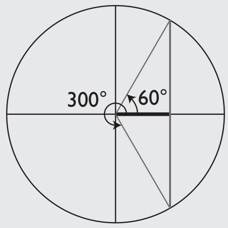
Solución:

$\cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

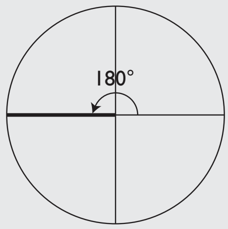
a) cos x = 1/2



$x_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 300° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) cos x = – 1



$x_3 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

74 $\text{sen } x \cdot \cos x = 2\cos x$

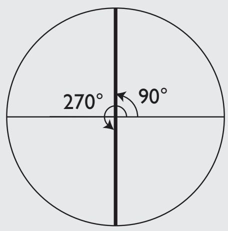
Solución:

$\text{sen } x \cdot \cos x - 2\cos x = 0$

$\cos x\,(\text{sen } x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

sen x – 2 ≠ 0 para todo valor de **x**

Si cos x = 0



$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 90° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

75 $\text{tg } x = 2\,\text{sen } x \cdot \cos x$

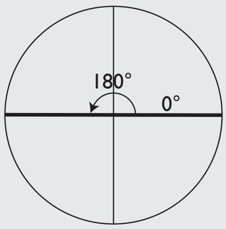
Solución:

$\text{sen } x = 2\,\text{sen } x \cdot \cos^2 x$

$\text{sen } x - 2\,\text{sen } x \cdot \cos^2 x = 0$

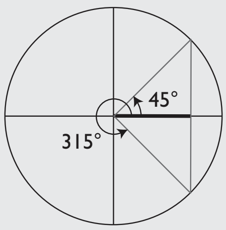
$$\operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 1 - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

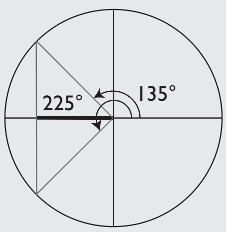
b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_3 = 45° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_5 = 135° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_6 = 225° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

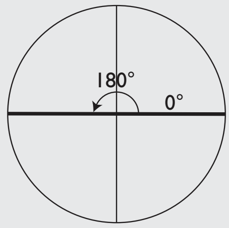
76 $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = 0$

Solución:

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$

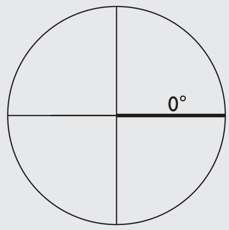
$$\operatorname{sen} x\,(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = 1 \end{cases}$$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos x = 1$



$x_3 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Es la misma que una anterior.

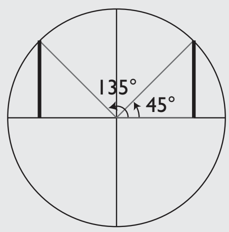
77 $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

Solución:

$\operatorname{sen} x = \cos x$

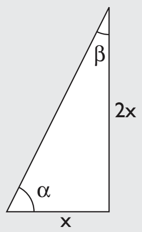
$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$

$\operatorname{tg} x = 1$



78 En un triángulo rectángulo un cateto mide el doble que el otro. Calcula la amplitud de sus ángulos agudos.

Solución:

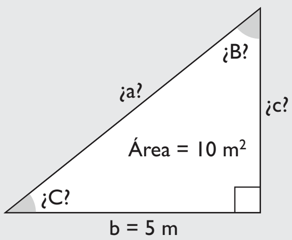


$\text{tg } \alpha = \dfrac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \alpha = 63° \, 26' \, 6''$

$\beta = 90° - 63° \, 33' \, 54'' = 26° \, 33' \, 54''$

79 En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 m, y el área, 10 m^2. Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

Solución:



$\text{Área} = \dfrac{1}{2} bc$

$\dfrac{1}{2} 5c = 10$

$5c = 20$

$c = 4$ m

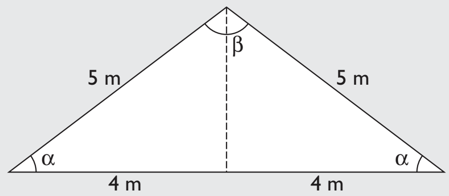
$a = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6{,}40$ m

$\text{tg } B = \dfrac{5}{4} \Rightarrow B = 51° \, 20' \, 25''$

$C = 90° - 51° \, 20' \, 25'' = 38° \, 39' \, 35''3$

80 En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 5 m, y el desigual, 8 m. Halla la amplitud de sus ángulos.

Solución:



$\cos \alpha = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36° \, 52' \, 12''$

$\beta = 180° - 2 \cdot 36° \, 52' \, 12'' = 106° \, 15' \, 36''$

Con calculadora

81 Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

a) sen $\alpha = 0{,}4$ estando α en el 1er cuadrante.

b) cos $\alpha = -0{,}65$ estando α en el 2º cuadrante.

c) tg $\alpha = 1{,}4$ estando α en el 3er cuadrante.

d) cos $\alpha = 0{,}8$ estando α en el 4º cuadrante.

Solución:

a) 23° 34' 41''

b) 130° 32' 30''

c) 234° 27' 44''

d) 323° 7' 48''

82 Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

a) cos $\alpha = 0{,}2$ estando α en el 1er cuadrante.

b) tg $\alpha = -1{,}6$ estando α en el 2º cuadrante.

c) sen $\alpha = -0{,}7$ estando α en el 3er cuadrante.

d) tg $\alpha = -0{,}5$ estando α en el 4º cuadrante.

Solución:

a) 78° 27' 47''

b) 122° 19''

c) 224° 25' 37''

d) 333° 26' 6''

83 Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

a) tg α = 2 estando α en el 1er cuadrante.

b) sen α = 0,9 estando α en el 2° cuadrante.

c) cos α = –0,4 estando α en el 3er cuadrante.

d) sen α = –0,3 estando α en el 4° cuadrante.

Solución:

a) 63° 26' 6'

b) 115° 50' 31"

c) 246° 25' 19"

d) 342° 32' 33"

Problemas

84 Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 80° en una circunferencia de 20 cm de radio.

Solución:

$\frac{20\pi}{180°} \cdot 80° = 27{,}93$ cm

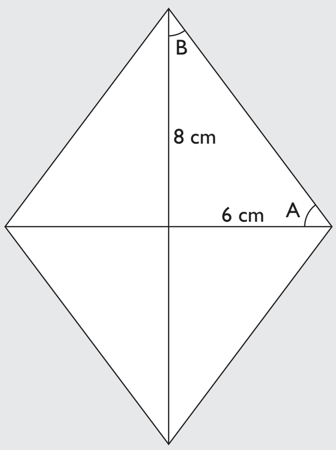
85 En una circunferencia de 8 cm de radio, el arco correspondiente a un ángulo central mide 32 cm. Calcula en radianes lo que mide dicho ángulo.

Solución:

$\frac{32}{8} = 4$ rad

86 Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. Calcula los ángulos del rombo.

Solución:



$\text{tg } A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

A = 53° 7' 48"

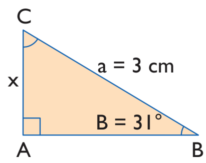
B = 90° – 53° 7' 48" = 36° 52' 12"

Los ángulos del rombo son:

2A = 106° 15' 37"

2B = 73° 44' 24"

87 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

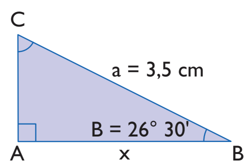


Solución:

$\text{sen } 31° = \frac{x}{3}$

$x = 3 \cdot \text{sen } 31° = 1{,}55$ cm

88 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

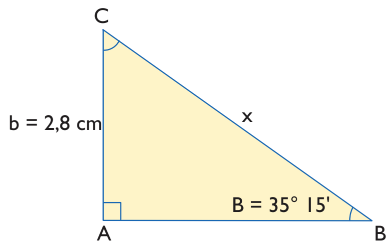


Solución:

$\cos 26° \ 30 = \frac{x}{3{,}5}$

$x = 3{,}5 \cdot \cos 26° \ 30' = 2{,}81$ cm

89 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

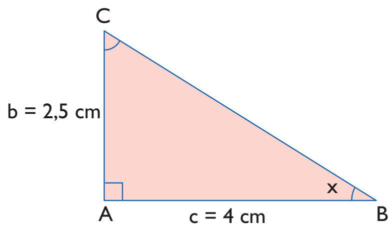


Solución:

$\text{sen } 35° \ 15' = \dfrac{2,8}{x}$

$x = \dfrac{2,8}{\text{sen } 35° \ 15'} = 4,85 \text{ cm}$

90 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

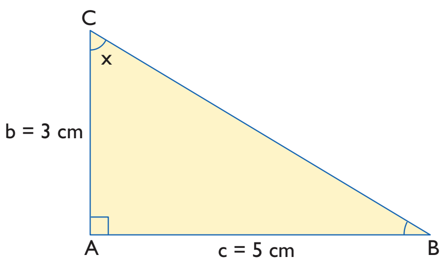


Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{2,5}{4}$

$x = 32° \ 19''$

91 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

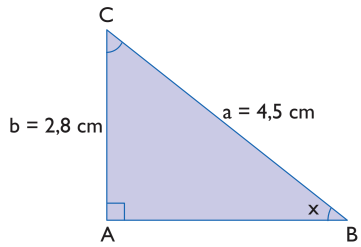


Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{5}{3}$

$x = 59° \ 2' \ 10''$

92 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:



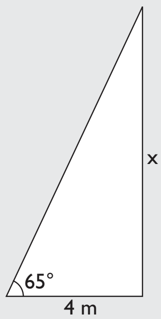
Solución:

$\text{sen } x = \dfrac{2,8}{4,5}$

$x = 38° \ 28' \ 43''$

93 El extremo de una escalera está apoyado sobre la pared de un edificio, y su base se encuentra a 4 m de la pared. Si el ángulo que forma la escalera con la pared es de 65°, ¿a qué altura del suelo llega la escalera?

Solución:

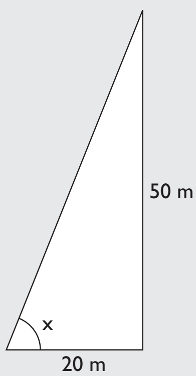


$\text{tg } 65° = \dfrac{x}{4}$

$x = 4 \text{ tg } 65° = 8,58 \text{ m}$

94 Una torre de 50 m de altura proyecta un sombra de 20 m a cierta hora del día. Calcula el ángulo con el que se verá el extremo superior de la torre desde el extremo de la sombra.

Solución:



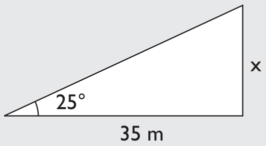
$\text{tg } x = \dfrac{50}{20}$

$\text{tg } x = 2,5$

$x = 68° \ 11' \ 55''$

95 A una distancia de 35 m del pie de una chimenea se ve el extremo de la misma con un ángulo de 25°. Calcula la altura de la chimenea.

Solución:

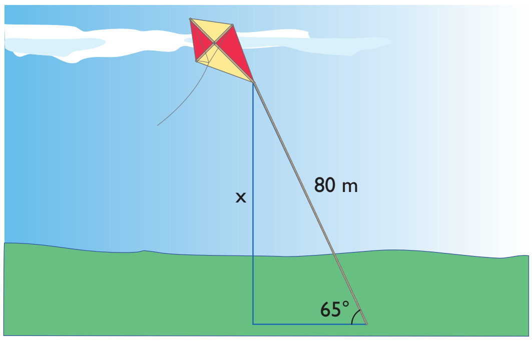


$\text{tg } 25° = \dfrac{x}{35}$

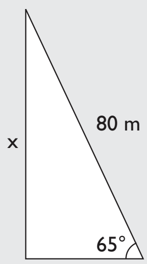
$x = 35 \text{ tg } 25°$

$x = 16{,}32 \text{ m}$

96 Una cometa está sujeta al suelo con una cuerda de 80 m de largo y ésta forma con el suelo un ángulo de 65°. Si la cuerda está recta, ¿a qué altura del suelo está la cometa?



Solución:

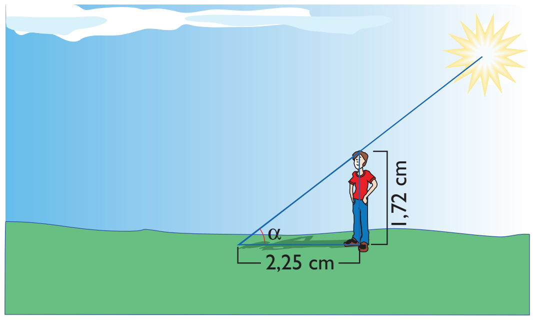


$\text{sen } 65° = \dfrac{x}{80}$

$x = 80 \text{ sen } 65°$

$x = 72{,}50 \text{ m}$

97 Una persona que mide 1,72 cm proyecta una sombra de 2,25 cm. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?

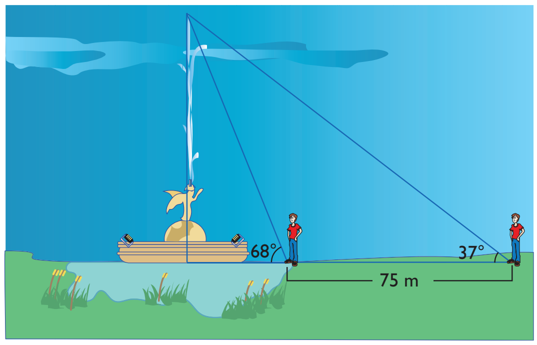


Solución:

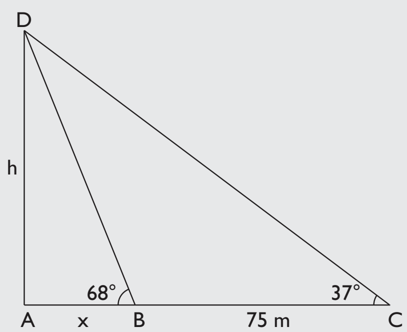
$\text{tg } \alpha = \dfrac{1{,}72}{2{,}25}$

$\alpha = 37° \ 23' \ 45''$

98 En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68°; alejándose 75 m del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37°. Calcula la altura del chorro de agua.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 68° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 37° = \dfrac{h}{x + 75} \end{array}\right\}$$

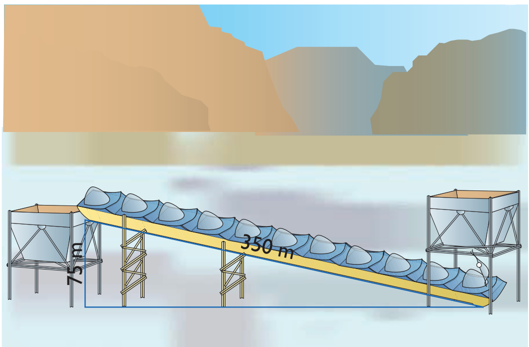
$$\left.\begin{array}{l} h = x\,\text{tg } 68° \\ h = (x + 75)\text{ tg } 37° \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = 2{,}48x \\ h = 0{,}75(x + 75) \end{array}\right\}$$

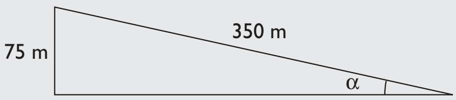
$x = 32{,}51$ m

$h = 80{,}64$ m

99 Una cinta transportadora de sacos de cemento mide 350 m y se quiere que eleve el cemento a 75 m de altura. ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?



Solución:

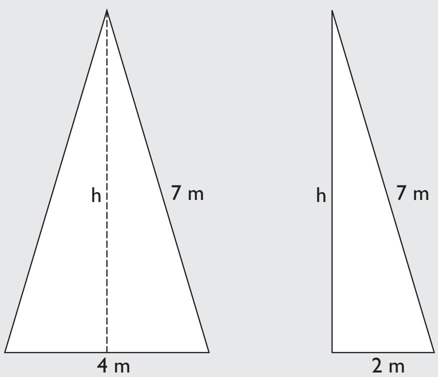


$$\text{sen } \alpha = \frac{75}{350}$$

$\alpha = 12° \ 22' \ 25''$

100 Dado un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7 m, y el desigual, 4 m, calcula la altura relativa al lado desigual.

Solución:

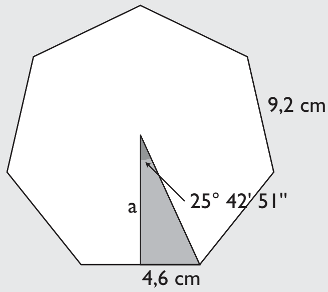


$h = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ m

101 Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9,2 cm

Solución:

$360° : 14 = 25° \ 42' \ 51''$

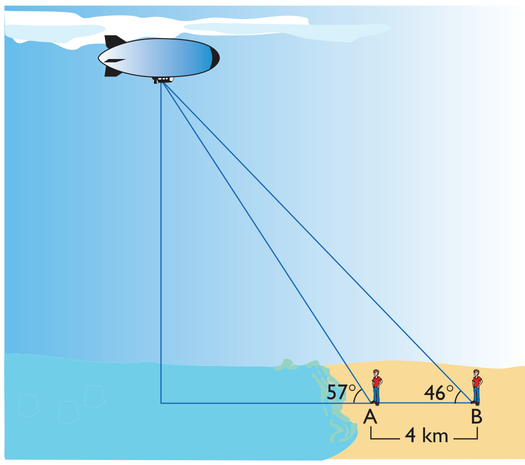


$$\text{tg } 25° \ 42' \ 51'' = \frac{4{,}6}{a}$$

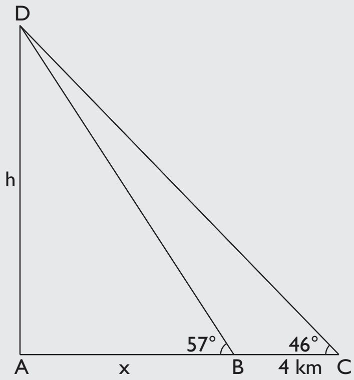
$a = 9{,}55$ cm

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 9{,}2 \cdot 9{,}55}{2} = 307{,}51 \text{ cm}^2$$

102 Dos personas están en una playa y ven un globo desde los puntos A y B, respectivamente, de forma que las dos personas y el globo están en un plano perpendicular al suelo. La distancia entre las dos personas es de 4 km. El ángulo de elevación del globo desde el punto A es de 57°, y desde el punto B, de 46°. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 57° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 46° = \dfrac{h}{x + 4} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = x \text{ tg } 57° \\ h = (x + 4) \text{ tg } 46° \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = 1{,}54x \\ h = 1{,}04(x + 4) \end{array}\right\}$$

$x = 8{,}32$ km

$h = 12{,}81$ km

Para profundizar

103 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = 2 \sec \alpha$$

Solución:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} =$$

$$= \frac{(1 + \text{sen } \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha\, (1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{1 + 2 \text{ sen } \alpha + \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha\, (1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2 + 2 \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha\, (1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2\, (1 + \text{sen } \alpha)}{\cos \alpha\, (1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha} = 2 \sec \alpha$$

104 Resuelve la ecuación trigonométrica:

$\text{tg } x + 3 \text{ cotg } x = 4$

Solución:

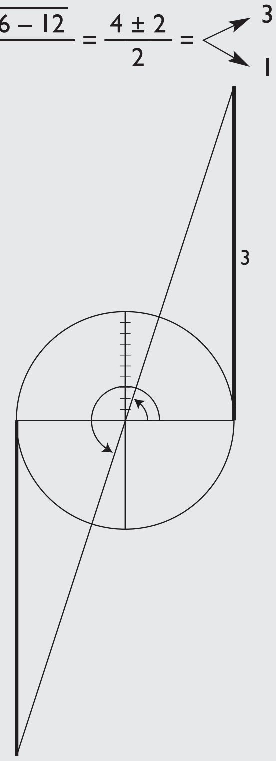
$$\text{tg } x + \frac{3}{\text{tg } x} = 4$$

$\text{tg}^2 x + 3 = 4 \text{ tg } x$

$\text{tg}^2 x - 4 \text{ tg } x + 3 = 0$

$$\text{tg } x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

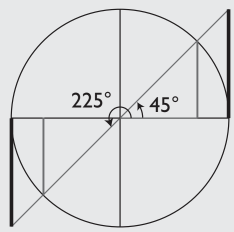
a) $\text{tg } x = 3$



$x_1 = 71° \ 33' \ 54'' + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 251° \ 33' \ 54'' + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{tg } x = 1$



$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 45° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

105 Resuelve la ecuación trigonométrica:

$\text{tg } x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

Solución:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \sqrt{2}$$

$$\text{sen } x = \sqrt{2} \cos^2 x$$

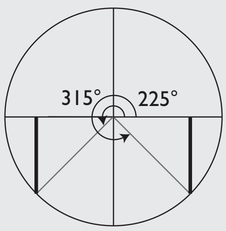
$$\text{sen } x = \sqrt{2}\,(1 - \text{sen}^2 x)$$

$$\sqrt{2}\,\text{sen}^2 x + \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$\text{sen } x = \sqrt{2}$ no tiene sentido porque $|\text{sen } x| \le 1$

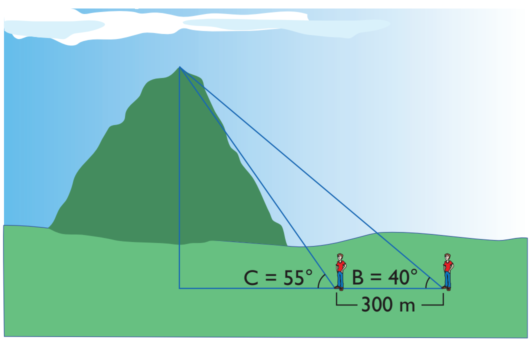
$$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



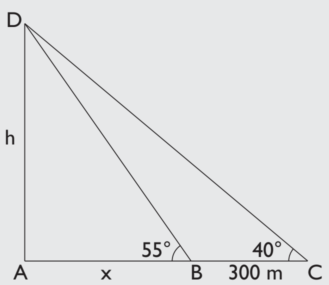
$x_1 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 315° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

106 En una llanura, desde un punto cualquiera se mide el ángulo B de elevación de una montaña y se obtiene 40°. Acercándose a la montaña una distancia de 300 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene 55°. Calcula la altura de la montaña.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 55° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 40° &= \frac{h}{x + 300} \end{aligned}\right\}$$

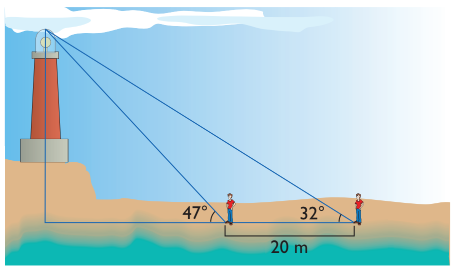
$$\left.\begin{aligned} h &= x\,\text{tg } 55° \\ h &= (x + 300)\,\text{tg } 40° \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 1{,}43x \\ h &= 0{,}84(x + 300) \end{aligned}\right\}$$

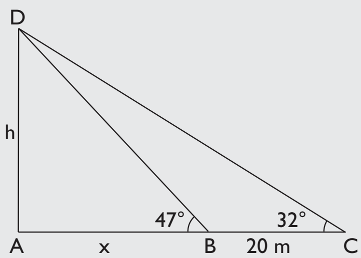
$x = 427{,}12$ m

$h = 610{,}78$ m

107 Un faro está colocado sobre un montículo. Al lado del montículo hay una pequeña llanura y desde ella se mide el ángulo de elevación del punto más alto del faro y se obtiene 47°. Nos alejamos en la misma dirección 20 m, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 32°. Calcula la altura del faro más el montículo.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 47° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 32° &= \frac{h}{x + 20} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= x\,\text{tg } 47° \\ h &= (x + 20)\,\text{tg } 32° \end{aligned}\right\}$$

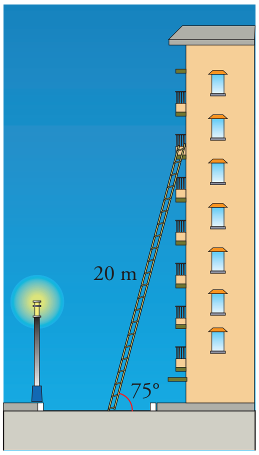
$$\left.\begin{aligned} h &= 1{,}07x \\ h &= 0{,}62(x + 20) \end{aligned}\right\}$$

$x = 27{,}56$ m

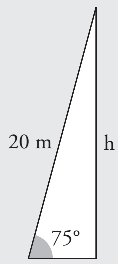
$h = 29{,}49$ m

Cálculo de alturas

108 Una escalera de bomberos que mide 20 m de longitud se apoya sobre una fachada. El ángulo que forma el suelo con la escalera es de 75°. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la fachada?



Solución:



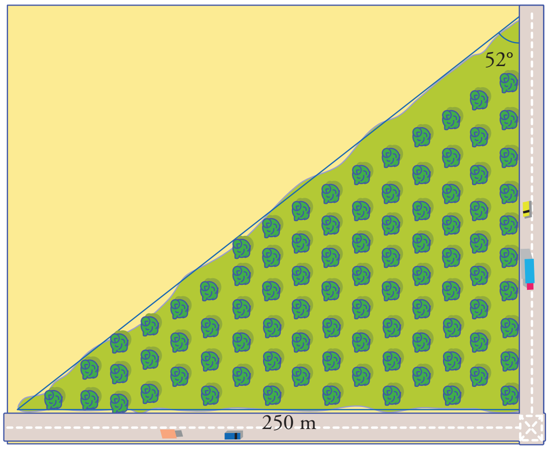
$$\text{sen } 75° = \frac{h}{20}$$

$h = 20 \cdot \text{sen } 75°$

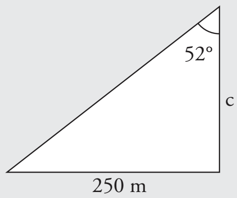
$h = 19{,}32$ m

Cálculo de áreas

109 Una finca tiene forma de triángulo rectángulo. Uno de los catetos mide 250 m, y el ángulo opuesto, 52°. Calcula el área de la finca.



Solución:



$$\text{tg } 52° = \frac{250}{c}$$

$c = 195{,}32$ m

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 195{,}32$$

$\text{Área} = 24\,415 \text{ m}^2$

Comprueba lo que sabes

1 Define qué es una identidad trigonométrica y pon un ejemplo.

Solución:
Una identidad trigonométrica es un igualdad que se verifica para cualquier valor de la variable.

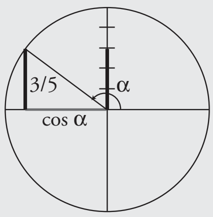
Ejemplo:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2 Un ángulo mide 1,23 rad. ¿Cuántos grados son?

Solución:
$1{,}23 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 70° \, 28' \, 26''$

3 Sabiendo que sen $\alpha = 3/5$ y que el ángulo está en el 2º cuadrante, halla el valor del cos α

Solución:



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{9}{25}$

$\cos^2 \alpha = \dfrac{16}{25}$

$\cos \alpha = -\dfrac{4}{5}$

4 Calcula el ángulo α en los siguientes casos:

a) sen $\alpha = 0{,}5678$ y el ángulo está en el 2º cuadrante.

b) cos $\alpha = -0{,}4321$ y el ángulo está en el 3er cuadrante.

c) tg $\alpha = -1{,}2345$ y el ángulo está en el 4º cuadrante.

Solución:
a) $\alpha = 145° \, 24' \, 11''$

b) $\alpha = 244° \, 23' \, 57''$

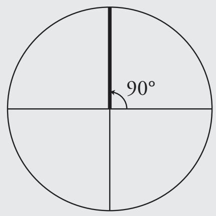
c) $\alpha = 309° \, 32''$

5 Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:
$\text{sen}^2 x + 2 = \cos^2 x + 3 \text{ sen } x$

Solución:
$2 \text{ sen}^2 x - 3 \text{ sen } x + 1 = 0$

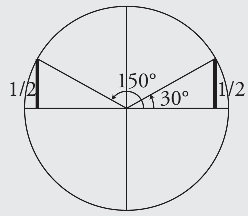
sen $x = 1$, sen $x = 1/2$

a) sen $x = 1$



$x_1 = 90° + 360°k, \ k \in \mathbb{Z}$

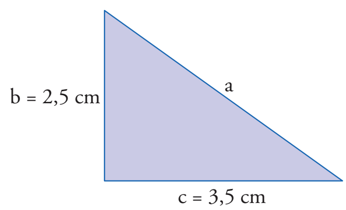
b) sen $x = 1/2$



$x_2 = 30° + 360°k, \ k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = 150° + 360°k, \ k \in \mathbb{Z}$

6 Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

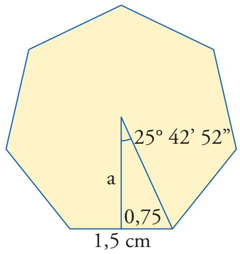


Solución:
$\text{tg } \alpha = \dfrac{2{,}5}{3{,}5} \Rightarrow \alpha = 35° \, 32' \, 16''$

$\beta = 90° - 35° \, 32' \, 16'' = 54° \, 27' \, 44''$

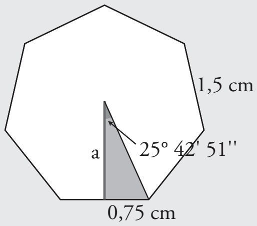
$a^2 = 2{,}5^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow a = 4{,}30 \text{ cm}$

7 Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 1,5 cm



Solución:

360° : 14 = 25° 42’ 51”



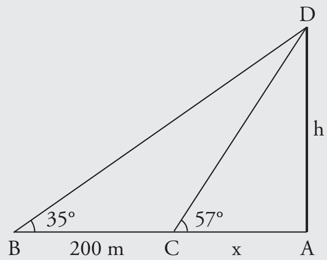
$$\text{tg } 25° \, 42' \, 51'' = \frac{0,75}{a}$$

a = 1,56 cm

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 1,5 \cdot 1,57}{2} = 8,24 \text{ cm}^2$$

8 En la llanura, desde un punto cualquiera, se mide el ángulo B de elevación de una montaña y se obtiene 35°. Acercándose a la montaña una distancia de 200 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene 57°. ¿Cuánto mide de alto la montaña?

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 57° = \dfrac{h}{x} \\ \\ \text{tg } 35° = \dfrac{h}{x + 200} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = x \text{ tg } 57° \\ h = (x + 200) \text{ tg } 35° \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = 1,54\, x \\ h = (x + 200)\, 0,7 \end{array}\right\}$$

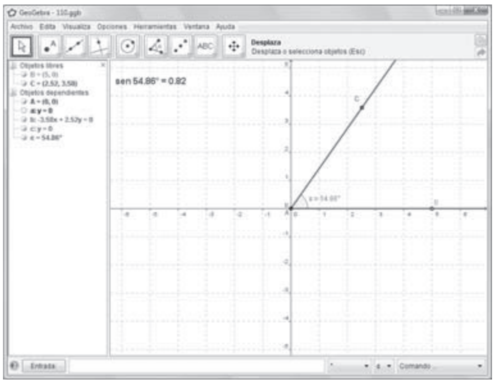
x = 166,67 m

h = 256,67 m

La montaña mide 256,67 m de alto.

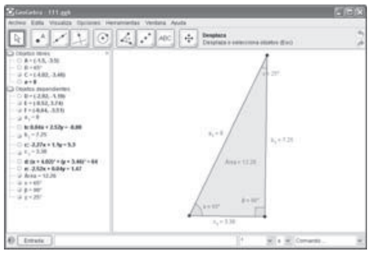
Paso a paso

110 Estudia el signo de la razón trigonométrica seno en cada cuadrante.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111 Dibuja un triángulo rectángulo en el que se conocen la hipotenusa a = 8 cm y el ángulo B = 65°. Calcula todos sus elementos.

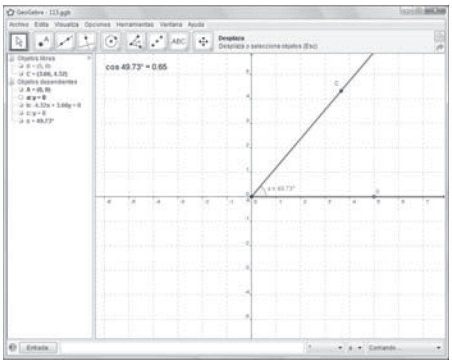


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

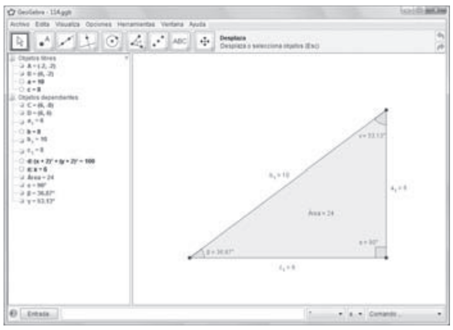
Practica

113 Estudia el signo de la razón trigonométrica coseno en cada cuadrante.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

114 Dibuja un triángulo rectángulo en el que se conocen la hipotenusa a = 10 cm y c = 8 cm. Calcula todos sus elementos.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Demuestra las siguientes identidades; primero dibuja el 1er miembro, y luego, el 2º

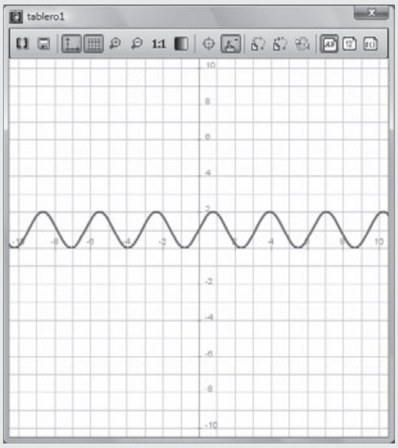
115 $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1 + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$

Solución:

Ejercicio 115

dibujar$((\cos(x) + \text{sen}(x))^2$, {color = azul, anchura_linea=2})

dibujar(1 + 2 · sen (x) · cos (x), {color = rojo, anchura_linea=2})



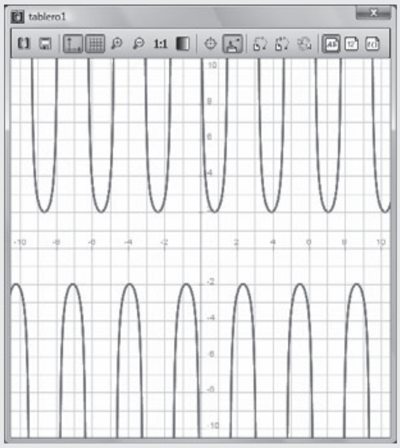
116 tg x + cotg x = sec x cosec x

Solución:

Ejercicio 116

dibujar(tan (x) + cot (x), {color = azul, anchura_linea=2})

dibujar(sec (x) · csc (x), {color = rojo, anchura_linea=2})



Resuelve las siguientes ecuaciones:

117 $3\text{sen } x - 2\cos^2 x = 0$

Solución:

Ejercicio 117

resolver$(3 \cdot \text{sen}(x) - 2 \cdot (\cos(x))^2 = 0) \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{\pi}{6}\right\},\left\{x=\frac{5\cdot\pi}{6}\right\}\right\}$

118 $\text{sen } x \cdot \cos x = 0$

Solución:

Ejercicio 118

resolver$(\text{sen}(x) \cdot \cos(x) = 0) \rightarrow \left\{\{x=0\},\{x=-\pi\},\{x=\pi\},\left\{x=\frac{\pi}{2}\right\},\left\{x=-\frac{\pi}{2}\right\}\right\}$