BLOQUE III

Geometría

7. Semejanza y trigonometría
8. Resolución de triángulos rectángulos
9. Geometría analítica

7 Semejanza y trigonometría

1. Teorema de Thales

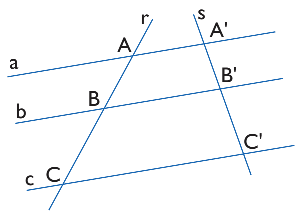
PIENSA Y CALCULA

Si una persona que mide 1,70 m proyecta una sombra de 3,40 m y el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de un árbol mide 15 m, ¿cuánto mide de alto el árbol?

Solución:
Se observa que el objeto mide la mitad que la sombra; por tanto, el árbol mide 15 : 2 = 7,5 m

APLICA LA TEORÍA

1 Sabiendo que en el siguiente dibujo AB = 18 cm, BC = 24 cm y A'B' = 15 cm, halla la longitud del segmento B'C'. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

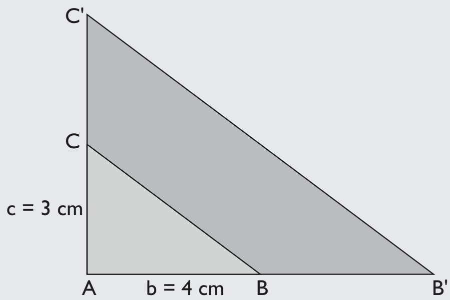
$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

B'C' = 20 cm

Hemos aplicado el teorema de Thales.

2 Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm y 3 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales de forma que el cateto mayor mida 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución:
r = 8 : 4 = 2
c' = 2 · 3 = 6 cm



3 Dos ángulos de un triángulo miden 45° y 60° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 75° y 60°. ¿Son semejantes ambos triángulos?

Solución:
El 3er ángulo del 1er triángulo mide:
180° – (45° + 60°) = 180° – 105° = 75°
Es decir, los ángulos del 1er triángulo miden:
45°, 60° y 75°

El 3^{er} ángulo del 2° triángulo mide:

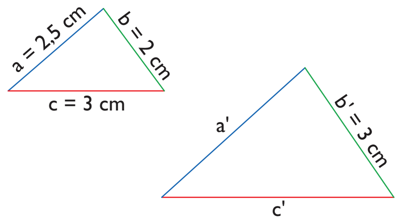
$180° - (75° + 60°) = 180° - 135° = 45°$

Es decir, los ángulos del 2° triángulo miden:

45°, 60° y 75°

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

4 Los dos triángulos del siguiente dibujo son semejantes. Halla cuánto miden a’ y c’



Solución:

r = b’ : b

r = 3 : 2 = 1,5

a’ = 1,5 · 2,5 = 3,75 cm

c’ = 1,5 · 3 = 4,5 cm

5 En una foto están Ana y su madre. Se sabe que Ana mide en la realidad 1,65 m. En la foto Ana mide 6,6 cm, y su madre, 6,88 cm. ¿Cuánto mide su madre en la realidad?

Solución:

$$\frac{6,6}{165} = \frac{6,88}{x}$$

x = 172 cm = 1,72 m

6 Un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra de un edificio el mismo día, en el mismo sitio y a la misma hora mide 24 m, ¿cuánto mide de alto el edificio?

Solución:

$$\frac{2}{1,75} = \frac{24}{x}$$

x = 21 m

7 La superficie de una esfera es de 15 m^2. Halla la superficie de otra esfera en la que el radio mide el triple.

Solución:

$S' = 3^2 \cdot 15 = 135\ m^2$

2. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 3, 4 y 5 b) 6, 7 y 8 c) 6, 8 y 10 d) 5, 12 y 13

Solución:

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$ b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$ c) $6^2 + 8^2 = 10^2$ d) $5^2 + 12^2 = 13^2$

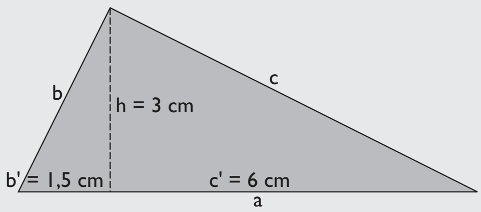
Son ternas pitagóricas a), c) y d)

8 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 1,5 cm y 6 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{1{,}5 \cdot 6} = 3$ cm



9 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 3,6 m. Halla:

a) la longitud del cateto **b**

b) la longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.

c) la longitud del cateto **c**

d) la longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**

e) Dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

a) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{10 \cdot 3{,}6} = 6$ m

b) $c' = a - b'$

$c' = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$ m

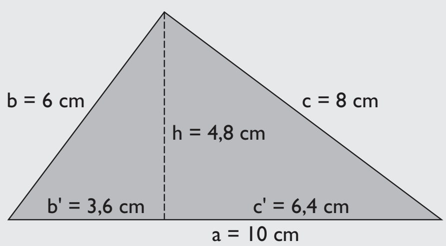
c) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

$c = \sqrt{10 \cdot 6{,}4} = 8$ m

d) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

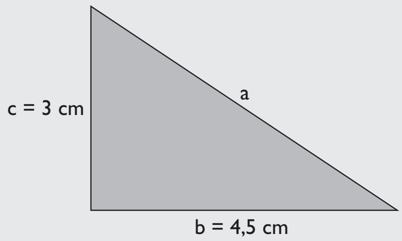
$h = \sqrt{3{,}6 \cdot 6{,}4} = 4{,}8$ m

e) Dibujo



10 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,5 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

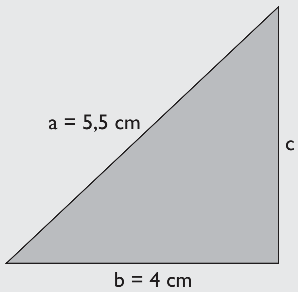


$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{4{,}5^2 + 3^2} = 5{,}41$ cm

11 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5,5 cm, y un cateto, 4 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

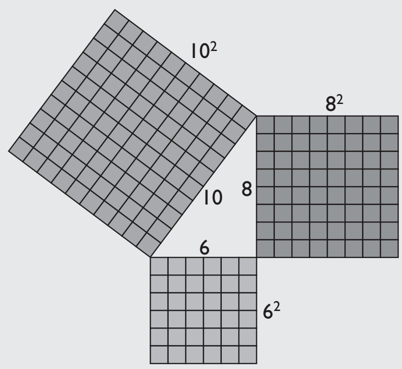


$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{5{,}5^2 - 4^2} = 3{,}77$ cm

12 Dibuja la interpretación gráfica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6, 8 y 10 cm

Solución:



$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$

13 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 2, 3 y 4 b) 3, 4 y 5

c) 4, 5 y 6 d) 5, 12 y 13

Solución:

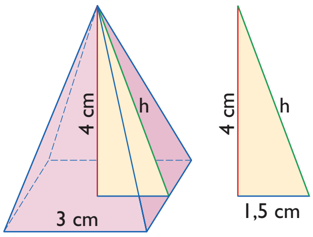
a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No

b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí

c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No

d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

14 En una pirámide cuadrangular la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 4 cm. Calcula el área lateral de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

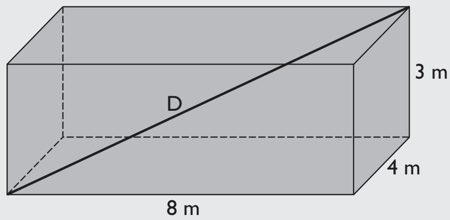
$h^2 = 1,5^2 + 4^2$

$h = 4,27$ cm

$A_L = 4 \cdot \dfrac{3 \cdot 4,27}{2} = 25,62 \text{ cm}^2$

15 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 8 m, 4 m y 3 m

Solución:



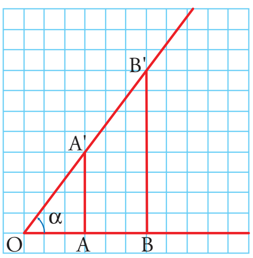
Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2$

$D = 9,43$ m

3. Razones trigonométricas o circulares

PIENSA Y CALCULA



Dado el ángulo α del dibujo:

a) aplica el teorema de Pitágoras y calcula mentalmente los segmentos OA' y OB'

b) halla las razones siguientes y di si hay alguna relación entre ellas:

$\dfrac{AA'}{OA'}$ $\dfrac{BB'}{OB'}$

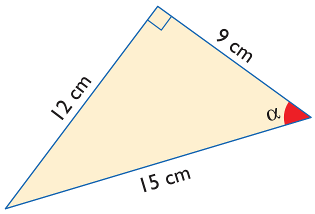
Solución:

a) OA' = 5, OB' = 10

b) $\dfrac{AA'}{OA'} = \dfrac{4}{5}, \dfrac{BB'}{OB'} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

Las dos razones son iguales.

16 Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:



Solución:

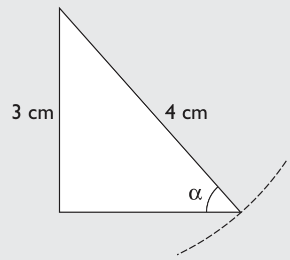
sen α = 12/15 = 4/5 ⇒ cosec α = 5/4

cos α = 9/15 = 3/5 ⇒ sec α = 5/3

tg α = 12/9 = 4/3 ⇒ cotg α = 3/4

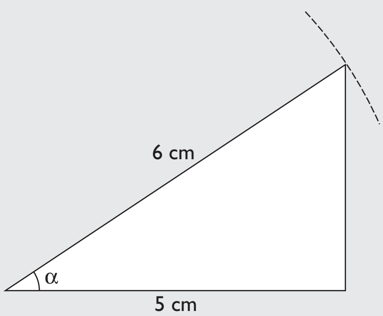
17 Dibuja un ángulo tal que sen α = 3/4

Solución:

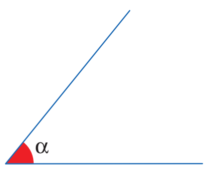


18 Dibuja un ángulo tal que cos α = 5/6

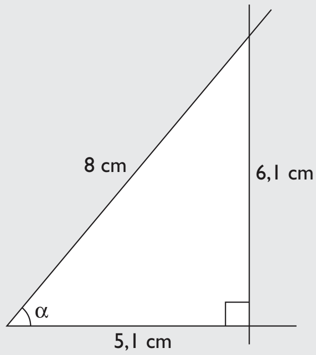
Solución:



19 Calcula de forma aproximada el valor del sen α, cos α y tg α en el siguiente dibujo:



Solución:



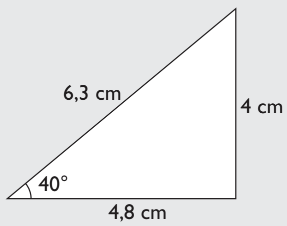
sen α = 6,1/8 = 0,76

cos α = 5,1/8 = 0,64

tg α = 6,1/5,1 = 1,20

20 Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α de 40° y aproxima, midiendo en el dibujo, el valor del sen α, cos α y tg α

Solución:



sen 40° = 4/6,3 = 0,63

cos 40° = 4,8/6,3 = 0,76

tg 40° = 4/4,8 = 0,83

21 Calcula, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea el resultado a 4 decimales.

a) sen 32° b) cos 68°

c) tg 85° 40' 8" d) sen 46° 35' 12"

Solución:

a) 0,5299

b) 0,3746

c) 13,2037

d) 0,7264

22 Calcula, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo α:

a) sen α = 0,5765 b) cos α = 0,3907

c) tg α = 1,8940 d) cos α = 0,3786

Solución:

a) 35° 12’ 17”

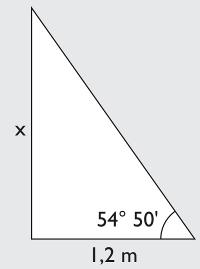
b) 67° 7”

c) 62° 10’

d) 67° 45’ 11”

23 Elisa y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 1,2 m y el ángulo con el que se ve la parte superior de su cabeza desde el extremo de la sombra mide 54° 50’. Calcula la altura de Elisa.

Solución:



$$\text{tg } 54° \, 50' = \frac{x}{1,2} \Rightarrow x = 1,2 \text{ tg } 54° \, 50' = 1,70 \text{ m}$$

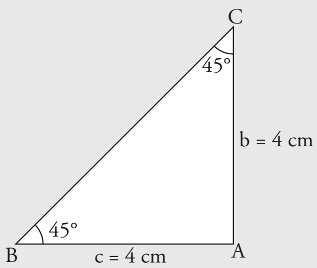
4. Relaciones entre las razones trigonométricas

PIENSA Y CALCULA

Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.

a) ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

b) Calcula el valor de la tangente de uno de sus ángulos agudos.



Solución:

a) Los ángulos miden 90° : 2 = 45°

b) tg 45° = 4/4 = 1

APLICA LA TEORÍA

24 Sabiendo que sen α = 2/5, calcula cos α

Solución:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

25 Sabiendo que sec α = 17/8, calcula tg α

Solución:

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$

$\text{tg } \alpha = \frac{15}{8}$

26 Sabiendo que tg α = 3, calcula sen α

Solución:

$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$3^2 + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = 10 \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{10}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 3\,\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

27 Calcula cos 40° sabiendo que se verifica que sen 50° = 0,7660

Solución:

cos 40° = sen 50° = 0,7660

28 Sabiendo que sen α = 1/4, calcula las restantes razones trigonométricas de α

Solución:

$\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = 4$

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{15}{16}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{4} : \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

$\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$

29 Sabiendo que sen 20° = 0,3420 y cos 20° = 0,9397, calcula:

a) cos 70° b) sen 70° c) tg 20° d) tg 70°

Solución:

a) cos 70° = sen 20° = 0,3420

b) sen 70° = cos 20° = 0,9397

c) $\text{tg}\,20 = \dfrac{\text{sen}\,20°}{\cos 20°} = 0{,}3639$

d) $\text{tg}\,70° = \dfrac{\text{sen}\,70°}{\cos 70°} = 2{,}7477$

30 Simplifica la siguiente expresión:

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha$

Solución:

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \dfrac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

31 Simplifica la siguiente expresión:

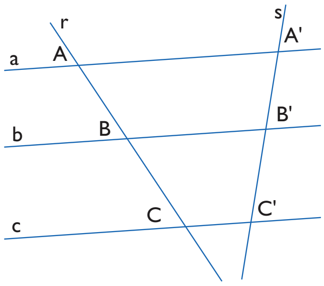
$\dfrac{1 + \text{tg}^2\,\alpha}{\sec\alpha}$

Solución:

$\dfrac{1 + \text{tg}^2\,\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{\sec^2\alpha}{\sec\alpha} = \sec\alpha$

1. Teorema de Thales

32 Sabiendo que AB = 7,5 cm, BC = 10 cm y B'C' = 12 cm, halla la longitud del segmento A'B'. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

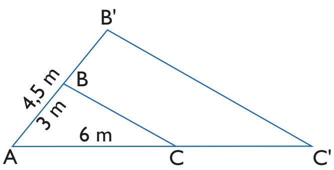
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

$\frac{A'B'}{7,5} = \frac{12}{10}$

A'B' = 9 cm

Hemos aplicado el teorema de Thales.

33 Sabiendo que AB = 3 m, AC = 6 m y AB' = 4,5 m, halla la longitud del lado AC'. ¿Cómo están los triángulos ABC y AB'C'?



Solución:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

$\frac{4,5}{3} = \frac{AC'}{6}$

AC' = 9 cm

Los triángulos ABC y AB'C' están en posición de Thales.

34 Un ángulo de un triángulo mide 53° y los lados que lo forman miden a = 6 cm y b = 9 cm. En otro triángulo semejante se sabe que un ángulo mide 53° y que uno de los lados que lo forman mide a' = 15 cm. ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 53°?

Solución:

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$

$\frac{15}{6} = \frac{x}{9}$

x = 22,5 cm

35 Un árbol de 1,6 m proyecta una sombra de 1,2 m. En el mismo sitio, el mismo día y a la misma hora, la sombra de una antena de telefonía móvil mide 52 m. ¿Cuánto mide de alto la antena de telefonía móvil?

Solución:

$\frac{1,2}{1,6} = \frac{52}{x}$

x = 69,33 cm

36 El volumen de una esfera es de 7,5 cm^3. Halla el volumen de otra esfera en la que el radio mide el doble.

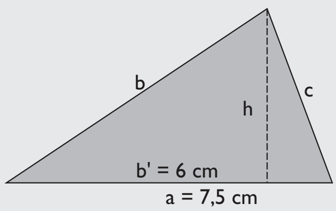
Solución:

$V' = 2^3 \cdot 7,5 = 60\ cm^3$

2. Teorema de Pitágoras

37 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 7,5 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de dicha altura.

Solución:



$h^2 = b' \cdot c'$

b' = 6 cm

c' = a – b' = 7,5 – 6 = 1,5 cm

$h^2 = 6 \cdot 1,5 = 9$

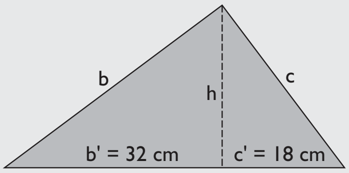
h = 3 cm

38 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden b' = 32 cm y c' = 18 cm. Halla:

a) el cateto **b**

b) el cateto **c**

Solución:



a) $b^2 = a \cdot b'$

$a = b' + c' = 32 + 18 = 50$ cm

$b^2 = 50 \cdot 32$

$b = 40$ cm

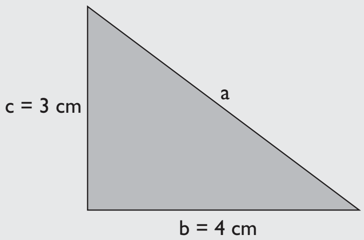
b) $c^2 = a \cdot c'$

$c^2 = 50 \cdot 18$

$c = 30$ cm

39 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo rectángulo.

Solución:



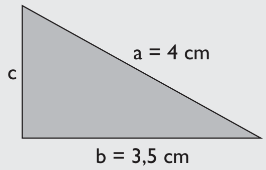
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$\text{Área} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$

40 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4 cm, y un cateto, 3,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} = 1{,}94$ cm

41 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 5, 7 y 9 b) 6, 8 y 10

c) 7, 9 y 11 d) 10, 24 y 26

Solución:

a) $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No

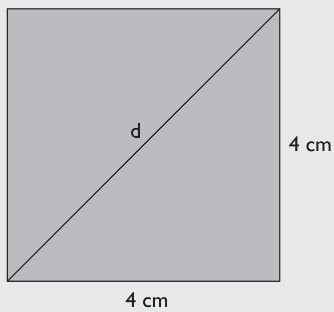
b) $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí

c) $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No

d) $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí

42 Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal. Redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.

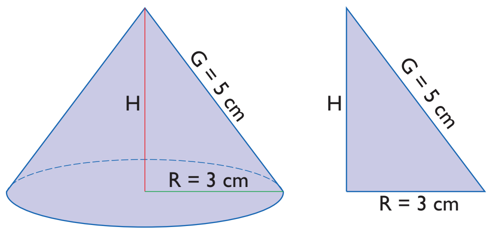
Solución:



$d^2 = 4^2 + 4^2$

$d = 5{,}7$ cm

43 Del siguiente cono se sabe que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 5 cm. Calcula el volumen de dicho cono. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura H

$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow H = \sqrt{G^2 - R^2}$

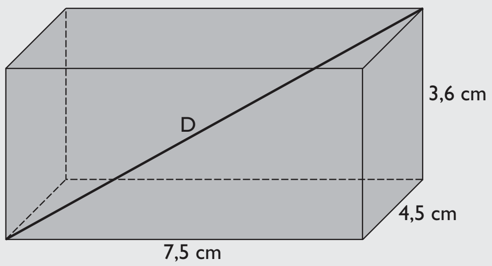
$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$V = A_B \cdot H$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}70 \text{ cm}^2$

44 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 7,5 cm, 4,5 cm y 3,6 cm

Solución:



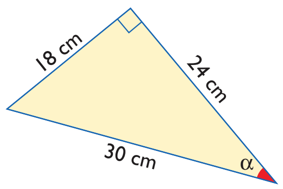
Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 7{,}5^2 + 4{,}5^2 + 3{,}5^2$

$D = 9{,}42$ cm

3. Razones trigonométricas o circulares

45 Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:



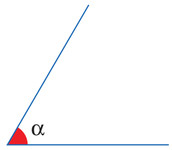
Solución:

$\text{sen } \alpha = 18/30 = 3/5 \Rightarrow \text{cosec } \alpha = 5/3$

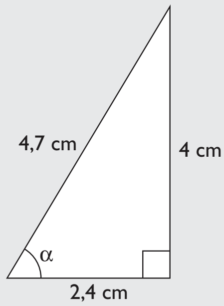
$\cos \alpha = 24/30 = 4/5 \Rightarrow \sec \alpha = 5/4$

$\text{tg } \alpha = 18/24 = 3/4 \Rightarrow \text{cotg } \alpha = 4/3$

46 Calcula el valor del seno, el coseno y la tangente del siguiente ángulo:



Solución:



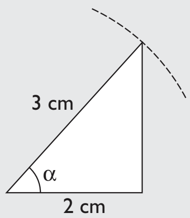
$\text{sen } \alpha = 4/4{,}7 = 0{,}85$

$\cos \alpha = 2{,}4/4{,}7 = 0{,}51$

$\text{tg } \alpha = 4/2{,}4 = 1{,}67$

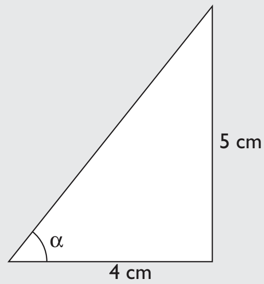
47 Dibuja un ángulo agudo **α** tal que $\cos \alpha = 2/3$

Solución:

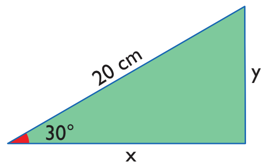


48 Dibuja un ángulo agudo **α** tal que $\text{tg } \alpha = 5/4$

Solución:



49 Calcula la longitud de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo sabiendo que se verifica que sen 30° = 0,5 y cos 30° = 0,8660



Solución:

$\text{sen } 30° = \dfrac{y}{20}$

$0,5 = \dfrac{y}{20} \Rightarrow y = 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ cm}$

$\cos 30° = \dfrac{x}{20}$

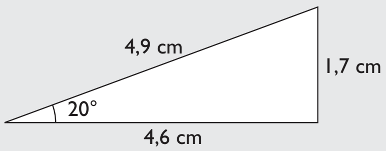
$0,8660 = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 0,8660 \cdot 20 = 17,32 \text{ cm}$

50 Dibuja los siguientes ángulos y aproxima midiendo en el dibujo el valor del seno, el coseno y la tangente. Aproxima el resultado a dos decimales:

a) 20° b) 50°

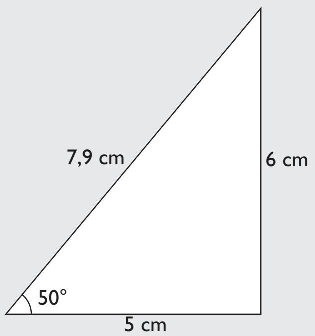
Solución:

a)



sen 20° = 1,7/4,9 = 0,35
cos 20° = 4,6/4,9 = 0,94
tg 20° = 1,7/4,6 = 0,37

b)



sen 50° = 6/7,9 = 0,76
cos 50° = 5/7,9 = 0,63
tg 50° = 6/5 = 1,2

51 Halla, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea los resultados a 4 decimales.

a) sen 42° 25' 30" b) cos 72° 40' 10"
c) tg 65° 30' 18" d) sen 16° 23' 42"

Solución:

a) 0,6746 b) 0,2979
c) 2,1948 d) 0,2823

52 Halla, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo **α**:

a) sen α = 0,8530 b) cos α = 0,4873
c) tg α = 0,7223 d) cos α = 0,7970

Solución:

a) α = 58° 32' 22" b) α = 60° 50' 12"
c) α = 35° 50' 26" d) α = 37° 9' 20"

4. Relaciones entre las razones trigonométricas

53 Sabiendo que sen α = 5/13, calcula cos α

Solución:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

54 Sabiendo que cos α = 9/15, calcula tg α

Solución:

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\dfrac{15}{9}\right)^2$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{3}$

55 Sabiendo que tg α = 3/2, calcula sen α

Solución:

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2 \alpha$

$\sec \alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

$$\text{sen}\ \alpha = \text{tg}\ \alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

56 Sabiendo que cos 72° = 0,3090, calcula sen 18°

Solución:

sen 18° = cos 72° = 0,3090

57 Sabiendo que cos α = 1/5, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 5$$

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\ \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{24}}{5} : \frac{1}{5} = \sqrt{24}$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24}$$

58 Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}^2\ \alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\ \alpha}$$

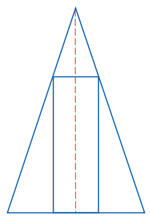
Solución:

$$\frac{\text{sen}^2\ \alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\ \alpha} = \frac{\text{sen}^2\ \alpha - 1 + \text{sen}^2\ \alpha}{1 - \text{sen}^2\ \alpha - \text{sen}^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ \text{sen}^2\ \alpha - 1}{1 - 2\ \text{sen}^2\ \alpha} = -1$$

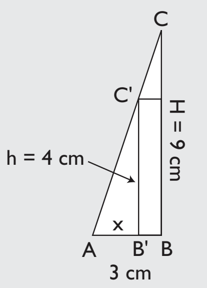
Para ampliar

59 Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es B = 6 cm, y la altura, H = 9 cm, y que la altura del rectángulo es h = 4 cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

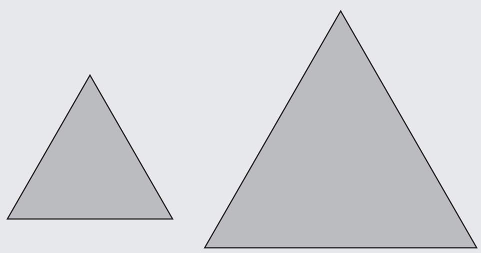
$$\frac{x}{3} = \frac{4}{9}$$

x = 1,33 cm

Base del rectángulo: 2(3 – 1,33) = 3,34 cm

60 Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.

Solución:



Sí son semejantes, porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

61 Los lados de un triángulo miden a = 5 cm, b = 7,5 cm y c = 9 cm. Halla la medida de los lados a', b' y c' de un triángulo semejante en el que r = 1,5

Solución:

a' = 1,5 · a

a' = 1,5 · 5 = 7,5 cm

b' = 1,5 · b

b' = 1,5 · 7,5 = 11,25 cm

c' = 1,5 · c

c' = 1,5 · 9 = 13,5 cm

62 Un palo de un metro de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de un metro. Si el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la pirámide Kefrén mide 136 m, calcula mentalmente lo que mide de alto la pirámide de Kefrén.

Solución:

La pirámide de Kefrén mide lo mismo que la sombra, es decir, 136 m

63 El radio de una circunferencia mide **x** metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Solución:

Longitud:

$\frac{L'}{L} = 3$

L' = 3L

La longitud es el triple.

Área:

$\frac{A'}{A} = 3^2$

A' = 9A

El área es nueve veces mayor.

64 Clasifica los siguientes triángulos en acutángulos, rectángulos y obtusángulos:

a) a = 1 cm, b = 1,5 cm, c = 2 cm

b) a = 1,5 cm, b = 2 cm, c = 2,5 cm

c) a = 2 cm, b = 2,5 cm, c = 3 cm

d) a = 2,5 cm, b = 6 cm, c = 6,5 cm

Solución:

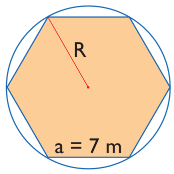
a) $1^2 + 1{,}5^2 = 3{,}25 < 2^2 = 4 \Rightarrow$ Obtusángulo.

b) $1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

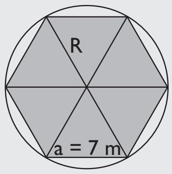
c) $2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25 > 3^2 = 9 \Rightarrow$ Acutángulo.

d) $2{,}5^2 + 6^2 = 6{,}5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

65 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:



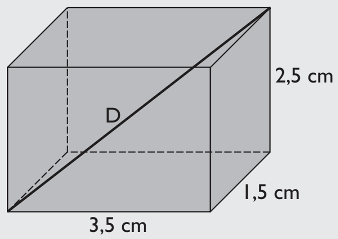
Solución:



En el hexágono coincide la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, R = 7 m

66 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3,5 cm, 1,5 cm y 2,5 cm

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 3{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2$

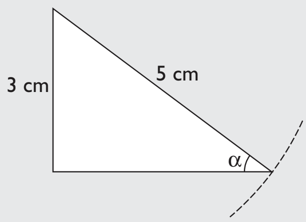
D = 4,56 cm

67 Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

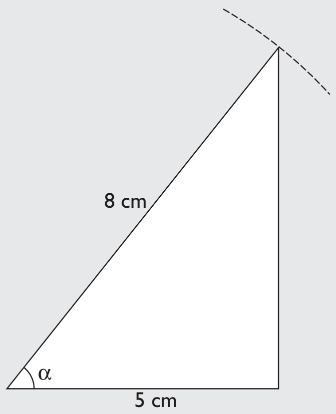
a) sen α = 3/5 b) cos α = 5/8

Solución:

a)



b)



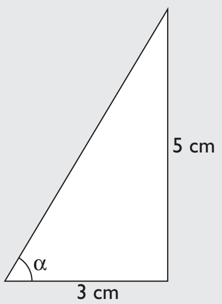
68 Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

a) $\text{tg}\ \alpha = 5/3$

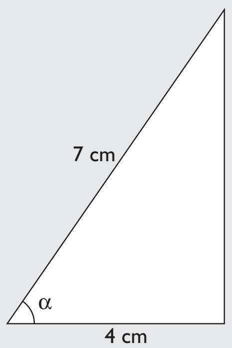
b) $\sec \alpha = 7/4$

Solución:

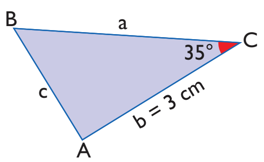
a)



b)



69 Calcula a, c y B en el siguiente triángulo rectángulo, sabiendo que $\text{tg}\ 35° = 0{,}7002$ y $\text{sen}\ 35° = 0{,}5736$. Aproxima el resultado a dos decimales.



Solución:

$\text{tg}\ 35° = \dfrac{c}{3} = 0{,}7002$

$c = 3 \cdot 0{,}7002 = 2{,}10\ \text{cm}$

$\text{sen}\ 35° = \dfrac{c}{a} = 0{,}5736$

$a = \dfrac{2{,}10}{0{,}5736} = 3{,}66\ \text{cm}$

$B = 55°$

70 Halla $\cos \alpha$ y $\text{tg}\ \alpha$ sabiendo que $\text{sen}\ \alpha = 3/5$

Solución:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{3}{4}$

71 Calcula $\text{sen}\ \alpha$ y $\text{tg}\ \alpha$ sabiendo que se verifica que $\cos \alpha = 2/5$

Solución:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{sen}^2\ \alpha + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 1$

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

72 Si $\text{tg}\ \alpha = 4$, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución:

$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{4}$

$\text{tg}^2\ \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$4^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = 17$

$\sec \alpha = \sqrt{17} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$

$\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = 4\frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\text{cosec } \alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$

73 Simplifica la siguiente expresión:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha$

Solución:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) =$

$= \cancel{\cos^3} \alpha + \cos \alpha - \cancel{\cos^3} \alpha =$

$= \cos \alpha$

Con calculadora

74 Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) cos 17° 30’ 20”

b) tg 20° 30’ 40”

c) sen 39° 40’

Solución:

a) 0,9537

b) 0,3741

c) 0,6383

75 Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) sen 21° 50’

b) cos 32° 30”

c) tg 15° 20’ 30”

Solución:

a) 0,3719

b) 0,8434

c) 0,2744

76 Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) sec 50°

b) cotg 15° 40’

c) cosec 43° 12”

Solución:

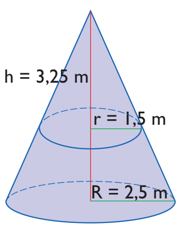
a) 1,5557

b) 3,5656

c) 1,4608

Problemas

77 Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.



Solución:

$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{2,5}{1,5} = \frac{H}{3,25}$

H = 5,42 m

78 Los lados de un triángulo miden a = 2 cm, b = 2,5 cm y c = 3,5 cm. Sabiendo que en otro triángulo semejante a’ = 5 cm, halla la medida de los lados b’ y c’

Solución:

Razón de semejanza:

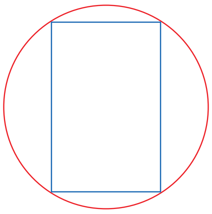
$r = \frac{a'}{a}$

$r = \frac{5}{2} = 2,5$

b’ = 2,5 · 2,5 = 6,25 cm

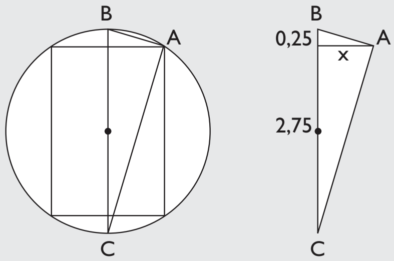
c’ = 2,5 · 3,5 = 8,75 cm

79 Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la circunferencia es $R = 1{,}5$ cm y que la altura del rectángulo es $h = 2{,}5$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



El triángulo dibujado es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

Aplicando el teorema de la altura:

$x^2 = 2{,}75 \cdot 0{,}25$

$x = 0{,}83$ cm

Base del rectángulo: $2x = 2 \cdot 0{,}83 = 1{,}66$ cm

80 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden b' = 18 cm y c' = 32 cm. Halla:

a) la longitud de la hipotenusa **a**

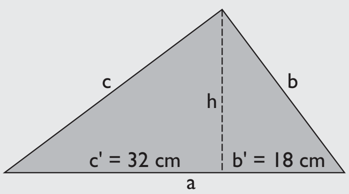
b) la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

c) el cateto **b**

d) el cateto **c**

e) el área de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



Solución:

a) $a = b' + c'$

$a = 18 + 32 = 50$ cm

b) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{18 \cdot 32} = 24$ cm

c) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{50 \cdot 18} = 30$ cm

d) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

$c = \sqrt{50 \cdot 32} = 40$ cm

e) $\text{Área} = b \cdot c$

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600 \text{ cm}^2$

81 Un rectángulo mide 400 m de perímetro y 2 500 m² de área. Halla el área de otro rectángulo semejante que mide 1 000 m de perímetro.

Solución:

$r = \dfrac{P'}{P}$

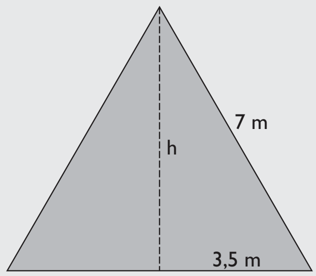
$r = \dfrac{1\,000}{400} = 2{,}5$

$A' = r^2 \cdot A$

$A' = 2{,}5^2 \cdot 2\,500 = 15\,625 \text{ m}^2$

82 Halla la altura de un triángulo equilátero de 7 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

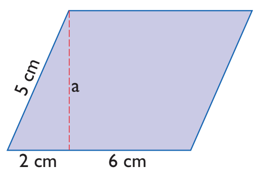
Solución:



$h^2 + 3{,}5^2 = 7^2$

$h = 6{,}06$ m

83 Halla el área del siguiente romboide:



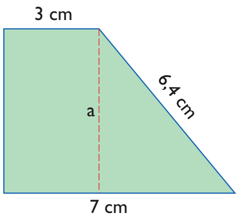
Solución:

$a^2 + 2^2 = 5^2$

$a = 4{,}58$ cm

Área: $8 \cdot 4{,}58 = 36{,}64$ cm^2

84 Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



Solución:

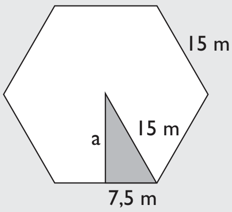
$a^2 + 4^2 = 6{,}4^2$

$a = 5{,}00$ cm

$\text{Área} = \dfrac{7 + 3}{2} \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$

85 Halla el área de un hexágono regular de 15 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

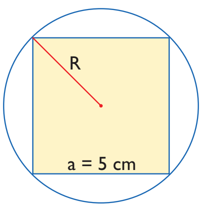


$a^2 + 7{,}5^2 = 15^2$

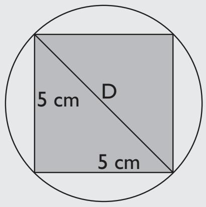
$a = 12{,}99 = 13{,}00$ m

$\text{Área} = \dfrac{6 \cdot 15}{2} \cdot 13 = 585 \text{ cm}^2$

86 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:



Solución:



$D^2 = 5^2 + 5^2$

$D = 7{,}07$ cm

$R = D/2 = 3{,}54$ cm

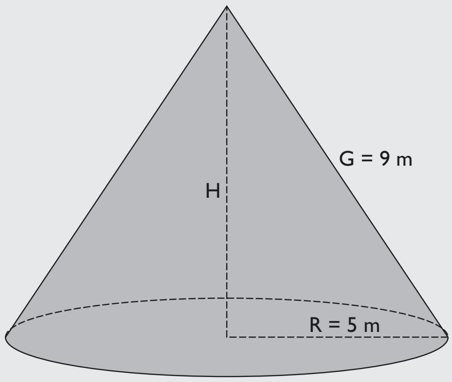
87 Una antena de radio proyecta una sombra de 57 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Sonia, que mide 1,75 m, proyecta una sombra de 2,20 m. Calcula la altura de la antena de radio.

Solución:

$\dfrac{2{,}20}{1{,}75} = \dfrac{57}{x} \Rightarrow x = 45{,}34$ m

88 Halla el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m y la generatriz mide 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$H^2 + 5^2 = 9^2$

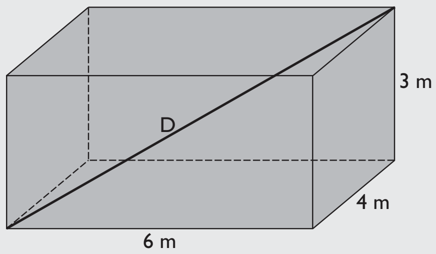
$H = 7{,}48$ m

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}48 = 195{,}83 \text{ m}^3$

89 Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m

Solución:

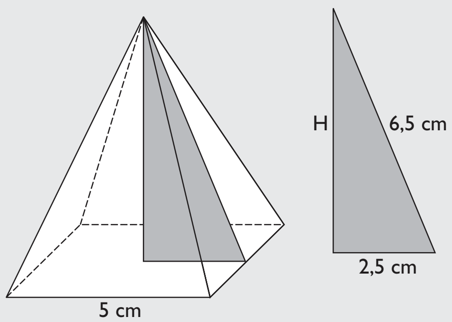


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 \Rightarrow D = 7,81$ m

90 Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 5 cm y la apotema mide 6,5 cm. Calcula su volumen.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 2,5^2 = 6,5^2$

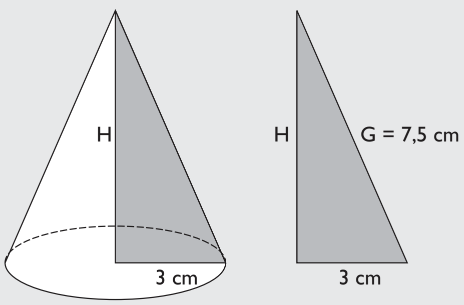
$H = 6$ cm

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = 50$ cm^2

91 Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 7,5 cm. Halla su altura.

Solución:



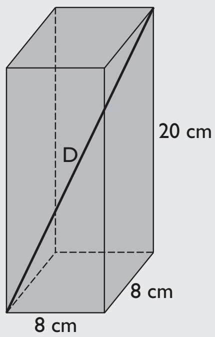
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 3^2 = 7,5^2$

$H = 6,87$ cm

92 Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene 8 cm de arista y 20 cm de altura.

Solución:

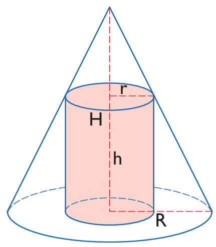


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 8^2 + 8^2 + 20^2$

$D = 22,98$ cm

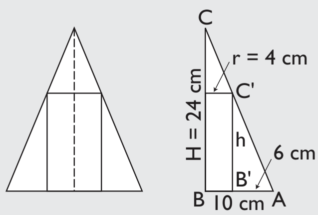
93 Se tiene un cilindro inscrito en un cono, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la altura del cono es $H = 24$ cm, el radio del cono es $R = 10$ cm, y que el radio del cilindro mide $r = 4$ cm, halla cuánto mide la altura **h** del cilindro.

Solución:

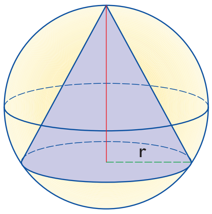
Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{h}{24} \Rightarrow x = 14,4$ cm

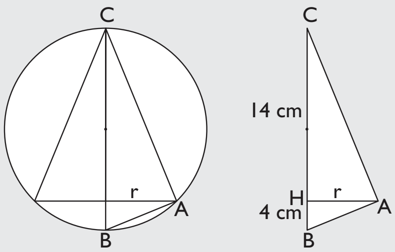
94 Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la esfera es R = 9 cm y que la altura del cono es h = 14 cm, halla cuánto mide el radio de la base del cono.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.



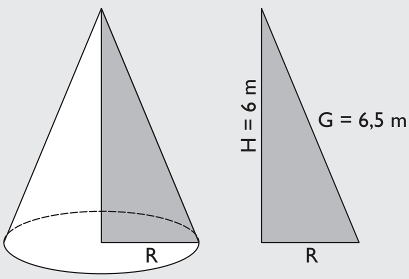
El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

Aplicando el teorema de la altura:

$r^2 = 14 \cdot 4 = 56 \Rightarrow r = 7{,}48$ cm

95 Halla el radio de la base de un cono recto en el que la altura mide 6 m, y la generatriz, 6,5 m

Solución:

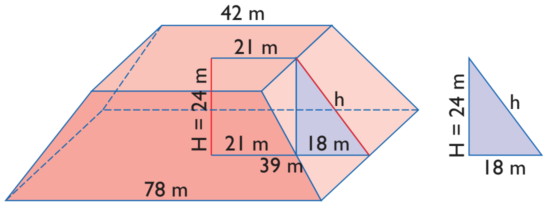


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$R^2 + 6^2 = 6{,}5^2$

$R = 2{,}5$ m

96 Calcula el área del siguiente tronco de pirámide:



Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 18^2 + 24^2$

$h = 30$ m

$A_{B_1} = 78^2 = 6\,084 \text{ m}^2$

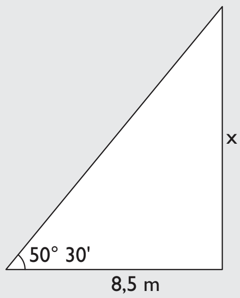
$A_{B_2} = 42^2 = 1\,764 \text{ m}^2$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{78 + 42}{2} \cdot 30 = 7\,200 \text{ m}^2$

$A_T = 6\,084 + 1\,764 + 7\,200 = 15\,048 \text{ m}^2$

97 Un árbol forma con su sombra un ángulo recto. Si la sombra mide 8,5 m, y el ángulo con el que se ve la parte superior del árbol, desde el extremo de la sombra, mide 50° 30', calcula la altura del árbol.

Solución:



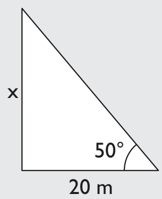
$\text{tg } 50° \ 30' = \dfrac{x}{8{,}5}$

$x = 8{,}5 \text{ tg } 50° \ 30' =$

$= 10{,}31$ m

98 Desde un punto en el suelo situado a 20 m del pie de la fachada de un edificio se ve el tejado del mismo con un ángulo de 50°. Calcula la altura del edificio.

Solución:

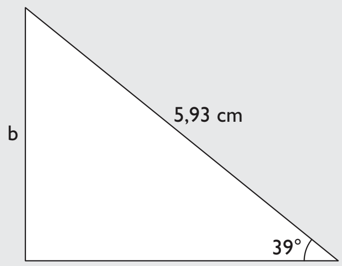


$\text{tg } 50° = \dfrac{x}{20}$

$x = 20 \text{ tg } 50° = 23{,}84$ m

99 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **b,** siendo a = 5,93 cm y B = 39°

Solución:

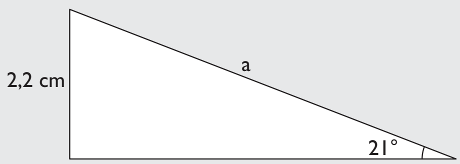


$\text{sen } 39° = \dfrac{b}{5,93}$

b = 5,93 sen 39° = 3,73 cm

100 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **a,** siendo b = 2,2 cm y B = 21°

Solución:

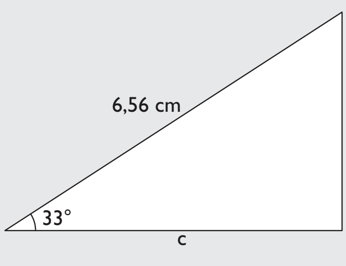


$\text{sen } 21° = \dfrac{2,2}{a}$

$a = \dfrac{2,2}{\text{sen } 21°} = 6,14 \text{ cm}$

101 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **c,** siendo a = 6,56 cm y B = 33°

Solución:

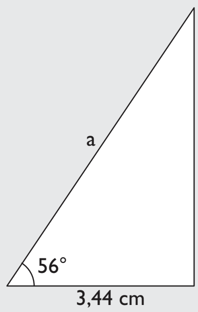


$\cos 33° = \dfrac{c}{6,56}$

c = 6,56 cos 33° = 5,50 cm

102 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **a,** siendo c = 3,44 cm y B = 56°

Solución:

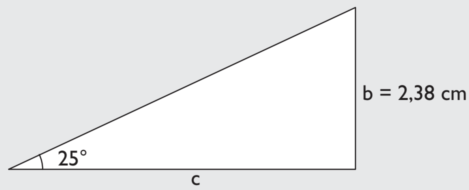


$\cos 56° = \dfrac{3,44}{a}$

$a = \dfrac{3,44}{\cos 56°} = 6,15 \text{ cm}$

103 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **c,** siendo b = 2,38 cm y B = 25°

Solución:

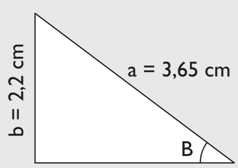


$\text{tg } 25° = \dfrac{2,38}{c}$

$c = \dfrac{2,38}{\text{tg } 25°} = 5,10 \text{ cm}$

104 Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **B,** siendo a = 3,65 cm y b = 2,2 cm

Solución:

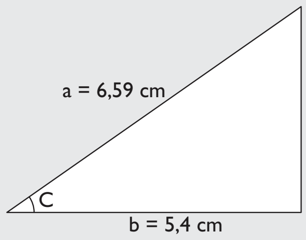


$\text{sen } B = \dfrac{2,2}{3,65}$

B = 37° 3' 59''

105 Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **C,** siendo a = 6,59 cm y b = 5,4 cm

Solución:

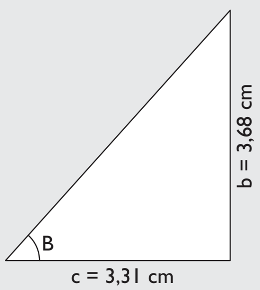


$\cos C = \dfrac{5,4}{6,59}$

$C = 34° \ 58' \ 22''$

106 Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **B,** siendo $b = 3,68$ cm y $c = 3,31$ cm

Solución:

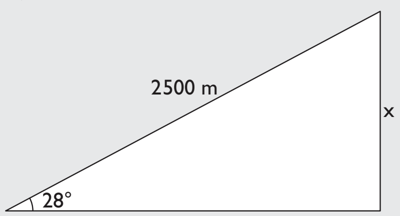


$\text{tg } B = \dfrac{3,68}{3,31}$

$B = 48° \ 1' \ 48''$

107 Desde un barco se mide con un radar la distancia a la cima de una montaña, que es de 2 500 m. El ángulo de elevación con el que se ve la cima desde el barco es de 28°. Calcula la altura de la montaña.

Solución:



$\text{sen } 28° = \dfrac{x}{2\,500}$

$x = 2\,500 \text{ sen } 28° = 1\,173,68$ m

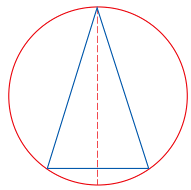
108 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$

Solución:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha)\cancel{(1 - \cos \alpha)}}{\cancel{1 - \cos \alpha}} = 1 + \cos \alpha$$

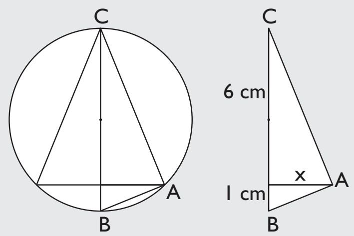
Para profundizar

109 Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $D = 7$ cm y que la altura del triángulo es $h = 6$ cm, halla cuánto mide la base del triángulo isósceles.

Solución:



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180°/2 = 90°$

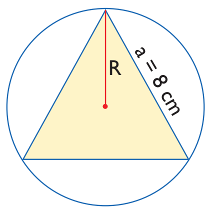
Aplicando el teorema de la altura:

$x^2 = 6 \cdot 1$

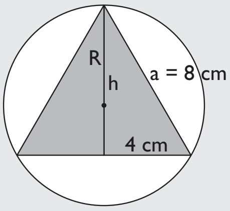
$x = 2,45$ cm

Base del triángulo: $2x = 2 \cdot 2,45 = 4,90$ cm

110 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero.



Solución:



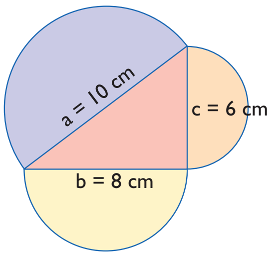
$h^2 + 4^2 = 8^2$

$h = 6,93$ cm

El radio es los 2/3 de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$R = \frac{2}{3} \cdot 6,93 = 4,62$ cm

111 Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden a = 10 cm, b = 8 cm y c = 6 cm. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.



Solución:

Área del semicírculo de radio a = 10 cm

$A_1 = \pi \cdot 10^2/2 = 157,08 \text{ cm}^2$

Área del semicírculo de radio b = 8 cm

$A_2 = \pi \cdot 8^2/2 = 100,53 \text{ cm}^2$

Área del semicírculo de radio c = 6 cm

$A_3 = \pi \cdot 6^2/2 = 56,55 \text{ cm}^2$

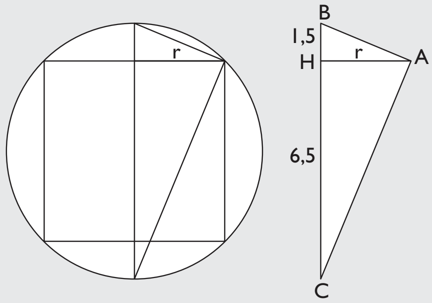
$A_2 + A_3 = 100,53 + 56,55 = 157,08 \text{ cm}^2$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

112 Se tiene un cilindro inscrito en una esfera. Sabiendo que el radio de la esfera es R = 4 cm y la altura del cilindro es h = 5 cm, halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

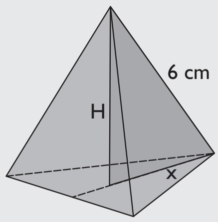
Aplicando el teorema de la altura:

$r^2 = 6,5 \cdot 1,5 = 9,75$

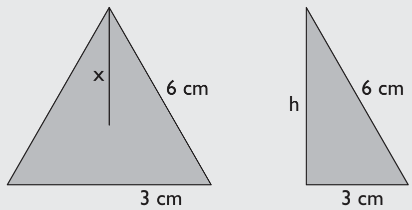
$r = 3,12$ cm

113 Calcula la altura de un tetraedro de arista 6 cm

Solución:



En primer lugar tenemos que hallar la altura del triángulo equilátero de la base, para poder hallar posteriormente **x**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$h^2 + 3^2 = 6^2$

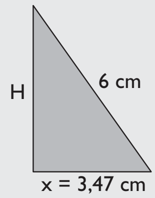
$h = 5,20$ cm

Por la propiedad de las medianas de un triángulo, éstas se cortan en un punto que está a 2/3 del vértice. Se tiene:

$x = \frac{2}{3} \cdot h$

$x = \frac{2}{3} \cdot 5{,}20 = 3{,}47$ cm

Se obtiene otro triángulo rectángulo formado por x, H y una arista:



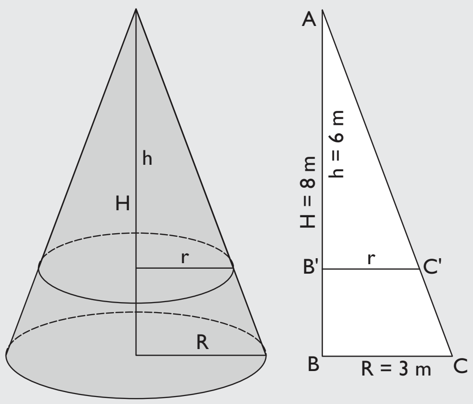
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 3{,}47^2 = 6^2$

H = 4,89 cm

114 El radio de la base de un cono mide 3 cm y la altura mide 8 m. Se corta por un plano paralelo a la base a 2 m de la misma. ¿Qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?

Solución:



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

$\frac{6}{8} = \frac{r}{3}$

r = 2,25 m

115 ¿Existe algún ángulo α tal que sen α = 4/5 y cos α = 3/4?

Solución:

Para que sea posible se debe cumplir la propiedad fundamental

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

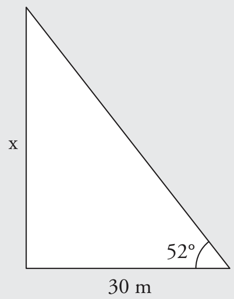
$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{481}{400} \neq 1$

No se cumple.

Cálculo de alturas

116 Desde un punto en el suelo situado a 30 metros del pie de una torre se traza la visual a la cúspide de la torre con un ángulo de 52°. ¿Cuál es la altura de la torre?

Solución:

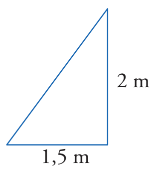


$\text{tg } 52° = \dfrac{x}{30}$

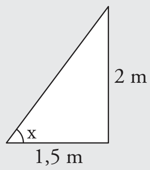
$x = 30 \text{ tg } 52° = 38{,}40 \text{ m}$

Cálculo de inclinaciones

117 ¿Cuál es la inclinación de los rayos del sol si un mástil de 2 m proyecta un sombra sobre el suelo de 1,5 m?



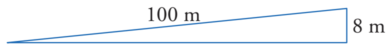
Solución:



$\text{tg } x = \dfrac{2}{1{,}5} = 1{,}33$

$x = 53° \, 3' \, 40''$

118 Un tramo de carretera salva en 100 m, medidos sobre la carretera, un desnivel de 8 m. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera?

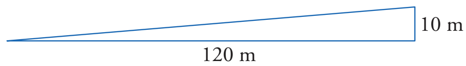


Solución:

$\text{sen } x = 8/100 = 0{,}08$

$x = 4° \, 35' \, 19''$

119 Una carretera sube 10 m en 120 m medidos en horizontal. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?



Solución:

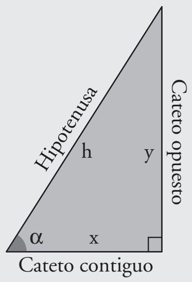
$\text{tg } x = 10/120 = 0{,}08$

$x = 4° \, 34' \, 26''$

Comprueba lo que sabes

1 Define las razones sen α, cos α y tg α en un triángulo rectángulo y pon un ejemplo.

Solución:



a) El **seno del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa.

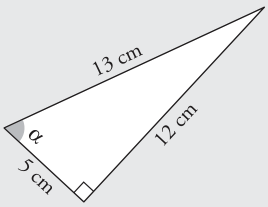
$$\text{sen } \alpha = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}}, \text{ sen } \alpha = \frac{y}{h}$$

b) El **coseno del ángulo** α es la razón entre el cateto contiguo al ángulo α y la hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{\textbf{cateto contiguo}}{\textbf{hipotenusa}}, \cos \alpha = \frac{x}{h}$$

c) La **tangente del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto contiguo}}, \text{ tg } \alpha = \frac{y}{x}$$



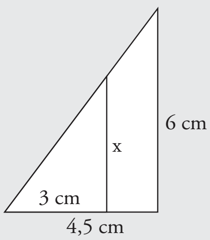
Ejemplo

Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo rectángulo de la figura del margen.

sen α = 12/13 cos α = 5/13 tg α = 12/5

2 Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4,5 cm y 6 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo menor en posición de Thales tal que su cateto menor mida 3 cm. Calcula la longitud del otro cateto.

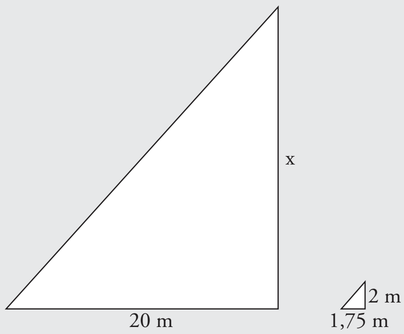
Solución:



$$\frac{6}{x} = \frac{4{,}5}{3} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

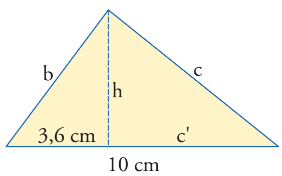
3 Un edificio proyecta una sombra de 20 m. El mismo día, y a la misma hora, un palo de 2 m proyecta una sombra de 1,75 m en el mismo lugar. Calcula la altura del edificio.

Solución:



$$\frac{20}{x} = \frac{1{,}75}{2} \Rightarrow x = 22{,}86 \text{ cm}$$

4 Calcula b, c, c' y h en el triángulo de la figura:



Solución:

$b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6$ cm

$c' = a - b'$

$c' = 10 - 3,6 = 6,4$ cm

$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

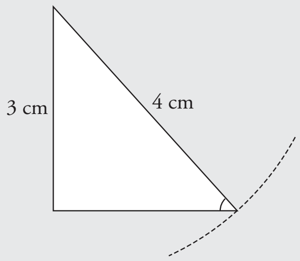
$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8$ cm

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ cm

5 Dibuja un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo tal que cumpla que sen $\alpha = 3/4$. ¿Cuántos triángulos puedes dibujar con esa condición?

Solución:



Se pueden dibujar infinitos triángulos, ya que el seno depende del ángulo y no depende del tamaño del triángulo.

6 Sabiendo que cos $\alpha = 0,4$, calcula sen α y tg α

Solución:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

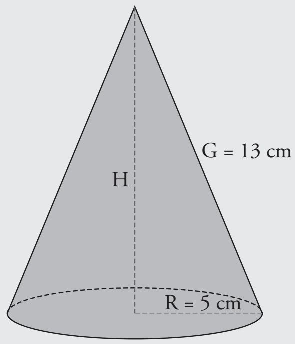
$\text{sen}^2\,\alpha + 0,4^2 = 1$

$\text{sen}\,\alpha = 0,92$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,92}{0,4} = 2,3$$

7 Calcula el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 5 cm y la generatriz mide 13 cm

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

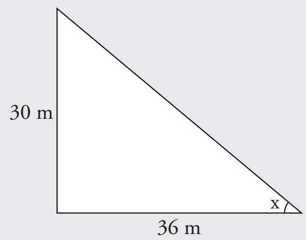
$5^2 + H^2 = 13^2$

$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16 \text{ cm}^3$$

8 ¿Con qué ángulo de inclinación se verá el tejado de un edificio, que tiene 30 m de altura, desde una distancia de 36 m de la fachada?

Solución:



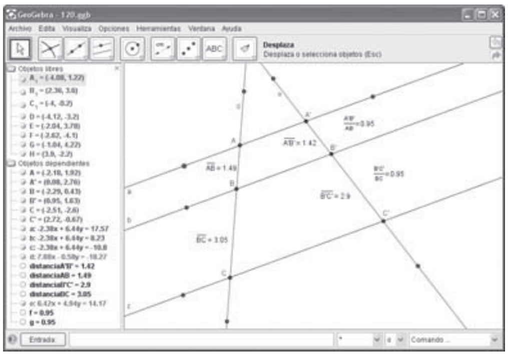
$$\text{tg}\,x = \frac{30}{36} = 0,8333$$

$x = 39° 48' 16''$

Linux/Windows GeoGebra

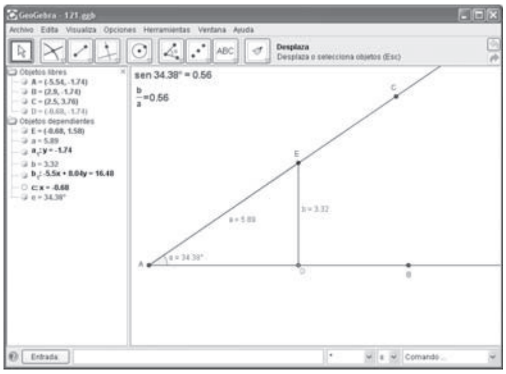
Paso a paso

120 Comprueba el teorema de Thales.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

121 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor del seno.

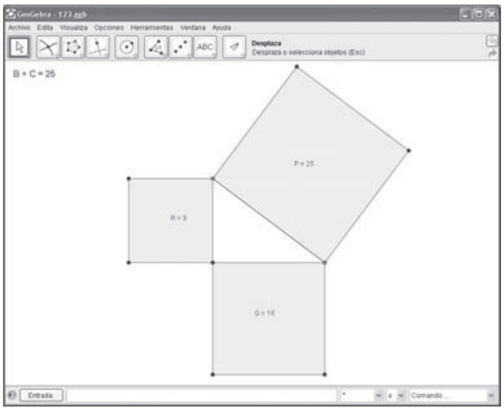


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

122 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

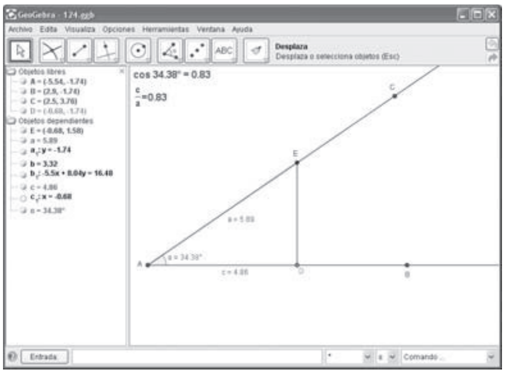
Practica

123 Comprueba el teorema de Pitágoras.



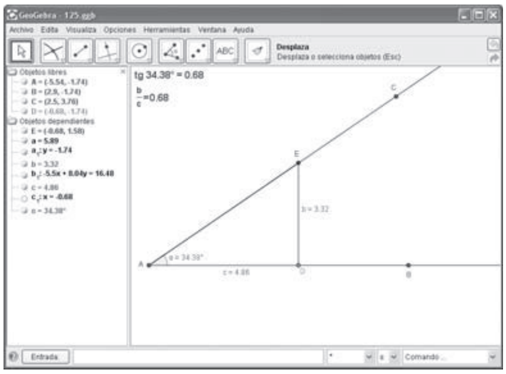
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

124 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor del coseno.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

125 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor de la tangente.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.