

Solución Examen Recuperación 1ª

1.- Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$.

- a) Comprueba que forman una base de los vectores libres del plano.
 b) Encuentra las componentes del vector $\vec{w} = (-1, 5)$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$

a) Para que dos vectores del plano formen una base de \mathbb{R}^2 basta con que no sean paralelos, o lo que es lo mismo, que no sean proporcionales: $\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{1}$, por tanto no son paralelos, y por tanto forman una base $B = \{(1, 2), (-3, 1)\}$

b) Escribimos el vector $\vec{w} = (-1, 5)$ como combinación lineal de los vectores de la base:
 $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Leftrightarrow (-1, 5) = \alpha(1, 2) + \beta(-3, 1)$

Esto nos genera un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -1 = \alpha - 3\beta \\ 5 = 2\alpha + \beta \end{cases}$ cuya solución es: $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Por tanto, $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v} = (2, 4) + (-3, 1) = (-1, 5) = \vec{w}$

2.- Si \vec{u} y \vec{v} son vectores ortonormales, halla los posibles valores del parámetro real a para que el vector $\vec{u} + a\vec{v}$ y el vector $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60° .

Sean $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, y los vectores $\vec{u} + a\vec{v} = (u_x + av_x, u_y + av_y)$ y $\vec{u} - a\vec{v} = (u_x - av_x, u_y - av_y)$, si ambos vectores forman un ángulo de 60° , utilizando el producto escalar, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v})}{\|\vec{u} + a\vec{v}\| \cdot \|\vec{u} - a\vec{v}\|} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{u_x^2 + u_y^2 - a^2(v_x^2 + v_y^2)}{\sqrt{(u_x - av_x)^2 + (u_y - av_y)^2} \cdot \sqrt{(u_x + av_x)^2 + (u_y + av_y)^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{u_x^2 + u_y^2 - a^2(v_x^2 + v_y^2)}{\sqrt{u_x^2 + a^2v_x^2 - 2au_xv_x + u_y^2 + a^2v_y^2 - 2au_yv_y} \cdot \sqrt{u_x^2 + a^2v_x^2 + 2au_xv_x + u_y^2 + a^2v_y^2 + 2au_yv_y}}$$

Multiplicando en cruz:

$$\sqrt{u_x^2 + a^2v_x^2 - 2au_xv_x + u_y^2 + a^2v_y^2 - 2au_yv_y} \cdot \sqrt{u_x^2 + a^2v_x^2 + 2au_xv_x + u_y^2 + a^2v_y^2 + 2au_yv_y} = 2(u_x^2 + u_y^2 - a^2(v_x^2 + v_y^2))$$

Como $-2au_xv_x - 2au_yv_y = -2a(u_xv_x + u_yv_y) = 0$ porque son ortogonales; sustituyendo:

$$\sqrt{(u_x^2 + a^2v_x^2 + u_y^2 + a^2v_y^2)(u_x^2 + a^2v_x^2 + u_y^2 + a^2v_y^2)} = 2(u_x^2 + u_y^2 - a^2(v_x^2 + v_y^2))$$

Y agrupando:

$$\sqrt{(u_x^2 + u_y^2 + a^2(v_x^2 + v_y^2))(u_x^2 + u_y^2 + a^2(v_x^2 + v_y^2))} = 2(u_x^2 + u_y^2 - a^2(v_x^2 + v_y^2))$$

Operando y despejando a:

$$u_x^2 + u_y^2 + a^2(v_x^2 + v_y^2) = 2(u_x^2 + u_y^2 - a^2(v_x^2 + v_y^2)) \rightarrow u_x^2 + u_y^2 - 3a^2(v_x^2 + v_y^2) = 0 \rightarrow 3a^2 = \frac{u_x^2 + u_y^2}{v_x^2 + v_y^2}$$

Y de aquí:

$$3a^2 = 1 \rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.- Sean la recta $r: mx-y=1$ y la recta $s: x-my=2m-1$. (2 puntos)

- a) Estudia la posición relativa de las rectas, según los valores del parámetro m .
- b) Determina m si ambas rectas se cortan en un punto de abscisa $x=3$.

Los vectores directores de r y s son $\vec{r} = (m, -1)$ y $\vec{s} = (1, -m)$. Para que las rectas sean paralelas, ha de ocurrir que $\frac{m}{1} = \frac{-1}{-m} \rightarrow -m^2 = -1 \rightarrow m = \pm 1$

Por tanto, si m es 1 ó -1, las rectas son paralelas. Veamos si son coincidentes o no:

- Si $m=1$, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: x-y-1=0 \\ s: x-y-1=0 \end{cases}$, que como vemos son la misma, por tanto son coincidentes.
- Si $m=-1$, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: -x-y-1=0 \\ s: x+y+3=0 \end{cases}$, que como podemos observar no son la misma, por tanto las rectas son paralelas no coincidentes.

En el caso de que m no sea ni 1 ni -1, las rectas son secantes. Veamos el caso en el que ambas son perpendiculares:

Para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que el producto escalar de los dos vectores directores sea nulo: r y s son perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow (m, -1) \cdot (1, -m) = 0 \Leftrightarrow m+m=0 \rightarrow 2m=0$

Por tanto para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que $m=0$.

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, las rectas son secantes.
- Si $m=0$, las rectas son perpendiculares.

Si ambas rectas se cortan en un punto con $x=3$, tenemos que el punto de corte será $(3, y)$, por tanto, si sustituimos en ambas rectas:

$$\begin{cases} r: 3m-y-1=0 \\ s: 3-my+1-2m=0 \end{cases}$$

despejando y de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{cases} y = 3m-1 \\ 3-m(3m-1)+1-2m=0 \end{cases} \rightarrow 3-3m^2+m+1-2m=0 \rightarrow -3m^2-m+4=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en m , obtenemos:

$$3m^2+m-4=0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} \rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Si $m=1$, como son coincidentes, es claro que se cortan en un punto de abscisa 3, y para el otro caso, son secantes en el punto de abscisa 3.

4.- Sea el triángulo de vértices $A(4,2)$, $B(13,5)$ y $C(6,6)$.

- a) Halla la ecuación de la altura que pasa por el vértice C .
- b) Calcula la longitud de los segmentos en que la altura anterior corta al lado AB .

a) Calculamos el vector $\vec{AB} = (9, 3)$ y por tanto, un haz de rectas perpendiculares al lado AB , será:

$9x + 3y + k = 0$, si obligamos a una de estas rectas a pasar por el vértice C , tenemos:

$$9 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + k = 0 \rightarrow k = -72$$

Por tanto la ecuación de la altura que pasa por el vértice C será: $9x + 3y - 72 = 0$, o lo que es lo mismo:

$$\boxed{3x + y - 24 = 0}$$

Solución Examen Recuperación 1ª

- b) Calculamos la recta que contiene a los puntos A y B. Del vector $\overline{AB} = (9,3)$ sacamos un haz de rectas paralelas: $3x - 9y + k = 0$, calculamos la recta que pasa por A(4,2) sustituyendo en el haz y calculando k: $3 \cdot 4 - 9 \cdot 2 + k = 0 \rightarrow 12 - 18 + k = 0 \rightarrow k = 6$, por tanto la recta que contiene al lado AB es la recta dada por: $3x - 9y + 6 = 0$.

Calculamos el punto, Q, de intersección de ambas rectas, resolviendo el sistema formado por ellas:

$$\begin{cases} 3x - 9y + 6 = 0 \\ 3x + y - 24 = 0 \end{cases} \rightarrow -10y + 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 7 \end{cases} \rightarrow Q = (7,3)$$

Ahora calculamos los vectores

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= (3,1) \rightarrow \|\overline{AQ}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ \overline{BQ} &= (6,2) \rightarrow \|\overline{BQ}\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Por tanto, los segmentos en los que corta la altura al lado AC, miden $\sqrt{10}$ y $2\sqrt{10}$

5.- Las Agujas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.

- a) ¿Cuál es la distancia que hay entre sus extremos cuando el reloj marca las cuatro de la tarde?
b) ¿Cuál es la superficie del triángulo que determinan a esa hora?.

- a) A las 4 de la tarde, las agujas forman un triángulo del que se conocen dos lados $a=12$, $b=10$ y un ángulo $\alpha = 120^\circ$.

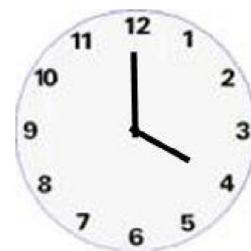
Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 100 + 144 + 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 364 \text{ cm}$$

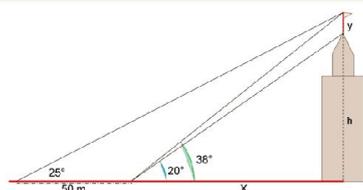
Por tanto la distancia entre los extremos de las agujas es: $c = 2\sqrt{91} = 19,08 \text{ cm}$

- b) Para el cálculo del área, utilizaremos la fórmula de Herón, que relacionaba el área del triángulo S con sus lados a,b y c y con su semiperímetro S:

$$S = \sqrt{S \cdot (S - a) \cdot (S - b) \cdot (S - c)} = \sqrt{20,54 \cdot (10,54) \cdot (8,54) \cdot (1,46)} = 51,96 \text{ cm}^2$$



6.- En el tejado de una casa hay una antena. Desde un punto del suelo se ven la casa y la antena bajo ángulos de 20° y 38° respectivamente. 50 metros más atrás, la antena se ve bajo un ángulo de 25° . Calcula la longitud de la antena.



Sea h la altura del edificio y la antena, aplicando tangentes en los dos triángulos tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \tan 38 &= \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \tan 38 \\ \tan 25 &= \frac{h}{x+50} \rightarrow h = \tan 25 \cdot (x+50) \end{aligned} \right\} \text{igualando: } x \tan 38 = \tan 25(x+50)$$

Operando:

$$x \tan 38 - x \tan 25 = 50 \tan 25 \rightarrow x = \frac{50 \tan 25}{\tan 38 - \tan 25} = 74,02 \text{ m}$$

Y de aquí, la altura de la torre y la antena h es: $h = x \cdot \tan 38 = 57,83 \text{ m}$

Para calcular la altura de la antena, calcularemos antes la altura del edificio h':

$$\tan 20 = \frac{h'}{x} \rightarrow h' = x \cdot \tan 20 = 74,02 \cdot \tan 20 = 26,94 \text{ m}$$

Por tanto, la altura de la antena y, la calculamos haciendo la diferencia de las dos alturas:

$$y = h - h' = 57,83 - 26,94 = 30,89 \text{ m}$$

7.- Si $\tan \alpha = 1,5$ y α es un ángulo del tercer cuadrante, calcula las restantes razones trigonométricas.

Si $\tan \alpha = 1,5$, entonces $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = 1,5 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 1,5 \operatorname{cos} \alpha$, utilizando la identidad fundamental de la trigonometría, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{13}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Como dicen que α está en el tercer cuadrante, $\operatorname{cos} \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \approx -0,55 \rightarrow \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx -1,80$

Conocido el coseno, como $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{2} \operatorname{cos} \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13} \approx -0,83 \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \approx -1,20$

8.- Expresa $\cos(3\alpha)$ en función de $\cos \alpha$

Descomponiendo $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$ y desarrollando como el coseno de una suma:

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha,$$

Utilizando las razones trigonométricas de los ángulos dobles:

$$= \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen} \alpha \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

Hacemos el cambio $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$= \cos^3 \alpha - \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha$$

Agrupando, llegamos a:

$$= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos(3\alpha)$$

9.- Resuelve la ecuación $2 \cdot \operatorname{sen}(2x) = \sqrt{2}$

Si pasamos el 2 a la derecha: $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Los ángulos cuyo seno es $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ son $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$, despejando x tenemos: $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x_2 = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

O lo que es lo mismo en grados sexagesimales:

$$x_1 = 11^\circ 15' + 180k = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad x_2 = 33^\circ 45' + 180k = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{R}$$